

Storia e Geografia della Matematica

GIORGIO T. BAGNI

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA,
UNIVERSITÀ DI ROMA «LA SAPIENZA»

II. Reading

Sommario

II-1. Saggio introduttivo

- II-1.1. Storia e Preistoria della Matematica
- II-1.2. Prime forme di conteggio
- II-1.3. Le radici: Matematica e Logica
- II-1.4. Geografia della Matematica: le terne pitagoriche
- II-1.5. Geografia della Matematica: il calcolo di *pi greco*
- II-1.6. La notazione numerica
- II-1.7. Aritmetica pratica nelle tradizioni europee ed extraeuropee
- II-1.8. Il postulato delle parallele
- II-1.9. Le radici storiche del Calcolo infinitesimale
- II-1.10. Un protagonista del XX secolo: Srinivasa Ramanujan
- II-1.11. Conclusioni: contaminazioni storiche e soggetti migranti
- II-1.12. **Stato dell'arte e orientamenti della ricerca**

II-2. Dati relativi agli Autori ed ai Testi

- II-2.1. Dati relativi agli Autori individuati
- II-2.2. Dati relativi ai Testi selezionati

II-3. Bibliografia ragionata

- II-3.1. Opere generali sulla storia della Matematica e della Logica
- II-3.2. Opere su argomenti particolari
- II-3.3. Opere riguardanti fonti originali ed aspetti didattici
- II-3.4. Alcuni siti interessanti presenti in rete

II-1. Saggio introduttivo

II-1.1. Storia e Preistoria della Matematica

Il dialogo fra tradizioni culturali diverse è un elemento essenziale dello sviluppo storico di una disciplina: anche un primo sommario approccio alla storia della cultura umana consente infatti di rilevare che interi settori, in ambito scientifico come in ambito artistico o letterario, sono nati e si sono sviluppati anche grazie alle preziose occasioni di confronto e di feconda “contaminazione” che hanno avuto come protagonisti pensatori appartenenti ad ambienti culturali diversi. [**Scheda n. 12. Albrecht Dürer nella storia della prospettiva**]. E da questo punto di vista la Matematica non costituisce certamente un’eccezione (i principali quadri teorici, anche con riferimento ai possibili riflessi didattici, sono presentati in: Radford, Boero & Vasco, 2000).

Come vedremo, le caratteristiche di multiculturalità, di integrazione tra approcci diversi, di confronto tra impostazioni apparentemente opposte, ma in effetti complementari e dunque particolarmente feconde, emergono con piena evidenza in tutta l’evoluzione storica della Matematica.

Osserviamo che sarebbe assai delicato cercare di fissare una “data di nascita” per la nostra disciplina, così come difficile è collocare cronologicamente gli esordi di ogni forma di pensiero, di riflessione razionale, di espressione. Per tentare una simile collocazione, inoltre, sarebbe indispensabile definire con chiarezza i limiti entro i quali individuare la “Matematica” vera e propria. Esiste un accordo, nell’ambito della comunità scientifica, sul significato da attribuire a questo termine? E che cosa comunemente intendono i non specialisti quando, oggi come nelle varie epoche storiche, si riferiscono alla Matematica?

Può essere possibile porre in relazione la Matematica ad ogni esperienza, anche rudimentale, di valutazione quantitativa, di considerazione delle molteplicità costituite da singoli oggetti, di confronto e di calcolo di lunghezze, di superfici, di volumi; oppure si può cercare di individuare una qualche forma di ragionamento, un qualsiasi esempio, anche elementare, di primitiva deduzione logica. Oppure infine si può spingersi ad analizzare il ben più evoluto passaggio all’astrazione, l’elaborazione consapevole e sistematica di definizioni, la coerente ricerca di procedimenti di validità generale, la dimostrazione di regole, di formule, di teoremi. Notiamo peraltro che neppure per un matematico professionista è semplice definire l’oggetto delle proprie riflessioni; nota non senza ironia Enrico Giusti:

“Una delle domande più imbarazzanti che possano venir rivolte ad un matematico è chiedergli di che cosa si occupa. Per fortuna la maggior parte delle persone crede che un matematico impieghi il suo tempo facendo lunghissime somme o divisioni a cento cifre, e quindi questa domanda non è molto frequente” (Giusti, 1999, p. 15).

Rinunceremo dunque ad individuare, in questa sede, una qualsiasi definizione generale della Matematica: le difficoltà filosofiche, epistemologiche, storiche, sociali (e l’elenco dei settori coinvolti potrebbe essere molto più lungo) condannerebbero tale tentativo a un prevedibile insuccesso. Preferiamo invece optare per l’introduzione storica di quanto, nel passato e fino ai giorni nostri, è stato considerato appartenente alla Matematica.

Scriva Morris Kline (Kline, I, 1991, p. 7) che la Matematica

“come disciplina organizzata e indipendente non esisteva prima dell’entrata in scena dei Greci del periodo classico, compreso fra il 600 ed il 300 a.C.”

[Scheda n. 7. I Greci, l'evento supremo]. E non possiamo certamente dargli torto, almeno se consideriamo il significato più elevato ed impegnativo del termine "Matematica", riferito ad un impianto teorico formalizzato e autonomo.

Tuttavia, come vedremo, la ricostruzione storica delle prime manifestazioni del pensiero matematico propone questioni di non banale soluzione; e problemi altrettanto delicati saranno collegati alla loro collocazione geografica. Non potremo infatti esimerci dall'analizzare anche molte importanti forme di Matematica pre-ellenica che, sebbene in chiave formalmente più debole e contenutisticamente ancora legata alle esigenze pratiche, condensarono in termini pienamente significativi la tensione dell'uomo verso una più esatta e consapevole comprensione della realtà: tali esperienze non sono facilmente circoscrivibili in un ambito geografico ristretto.

Nella "Cronologia della Matematica", riportata da Carl B. Boyer in appendice alla sua opera più fortunata, *Storia della Matematica* (Boyer, 1982), la prima data riportata è il 50 000 a.C. ed è riferita all'uomo di Neanderthal: la traccia di un primo, elementare conteggio comparve dunque nella lunga ed affascinante avventura dell'Uomo fin dai tempi più remoti. Così Gino Loria descrive le prime manifestazioni umane riconducibili alla Matematica:

"Le transazioni commerciali fra individui e fra popoli differenti, conseguenze inevitabili dell'umano consorzio, e, d'altro lato, l'aspirazione di sottoporre a misura l'universo dei fenomeni di cui il mondo è teatro e il genere umano spettatore, nella segreta speranza di determinarne il meccanismo e scoprirne le forze motrici, condussero, con un irresistibile imperativo categorico, l'uomo, non appena uscito dallo stato di barbarie, a foggarsi tanto un'embrionale Geometria quanto un'infantile Aritmetica. Perciò è lecito affermare, senza tema di essere tacciati di esagerazione, che la storia delle Matematiche comincia con la storia della civiltà" (Loria, 1929-1933, p. 1).

La Matematica accompagna dunque l'Uomo da millenni, lo guida e lo stimola lungo tutto il corso della sua storia in un'entusiasmante, progressiva costruzione del grande edificio del pensiero astratto. Come sopra accennato, infatti, il "fare Matematica" si svincolò, lentamente ma radicalmente, dalle quotidiane necessità pratiche del contare, del misurare, del calcolare, per divenire un inedito ed assai più impegnativo "pensare Matematica". Non avremo più, con la grande stagione della Geometria greca, l'esame e l'analisi di "una" singola situazione, in uno studio finalizzato alla particolare descrizione quantitativa di essa; bensì giungeremo all'esame ed all'analisi del complesso di "tutte" le situazioni analoghe ad una data, verso la comprensione e la descrizione delle caratteristiche che accomunano esempi, figure, casi anche quantitativamente assai diversi, ma qualitativamente, (e logicamente) equivalenti.

Prima di approfondire il legame essenziale tra la Matematica e la Logica non sarà inutile proporre una breve presentazione di alcuni aspetti di quella Matematica pratica, primitiva e rudimentale, nella quale non possiamo non individuare il germe fecondo che portò allo sviluppo di una delle più impegnative costruzioni razionali della cultura umana.

II-1.2. Prime forme di conteggio

Attorno al 30 000 a.C. sono databili le lunghe ossa di lupo con tacche incise, rinvenute nel 1937 nell'attuale Repubblica Ceca, nelle quali è chiaramente ravvisabile la traccia di un elementare conteggio (Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992, p. 1; Joseph, 2000). In esse sono riportate cinquantacinque tacche, suddivise a gruppi di cinque, e ciò sembra indicare che il 5 sia da considerare come base di un sistema primitivo di numerazione (Aristotele sarà il primo ad ipotizzare che proprio il numero delle dita di una mano fosse stato scelto come base per i primi sistemi di numerazione: Picutti,

1977, p. 7); e la capacità rivelata dai nostri antichi progenitori di comprendere, di evidenziare e di sfruttare la corrispondenza biunivoca tra gli oggetti da contare e le tacche incise sarebbe da considerare notevole. Del massimo interesse, inoltre, è stato il rinvenimento nell'Africa centroequatoriale dell'osso Ishango, risalente a circa ventimila anni fa, con raggruppamenti di segni che sono stati ricondotti da alcuni studiosi ad importanti concetti aritmetici (Joseph, 2000, pp. 37-41).

[Scheda n. 1. Proto-matematica africana: l'osso Ishango].

Come avvennero le prime forme di conteggio?

Se i rilevamenti archeologici precedentemente citati evidenziano l'importanza della base 5, alcuni storici ed antropologi hanno avanzato anche altre ipotesi: probabilmente una prima concezione numerica è in base 2 e troviamo conferma di ciò nell'esame della lingua tuttora in uso presso alcune tribù (D'Amore & Matteuzzi, 1976). Senza dubbio la ricerca antropologica deve essere considerata una preziosa fonte di informazioni per lo storico della matematica: Dirk J. Struik osserva che negli antichi linguaggi

“già cominciavano ad apparire semplici termini numerici e termini per alcune relazioni tra forme. Molte tribù australiane, americane e africane erano a questo stadio di sviluppo al momento del loro primo contatto con l'uomo bianco; alcune tribù vivono ancora in queste condizioni, cosicché è possibile studiarne costumi, abitudini e forme di espressione” (Struik, 1981, p. 22).

Struik riporta in proposito alcuni esempi tratti dalle lingue parlate da alcune tribù australiane:

Murray River:	1 = enea	
	2 = petcheval	
	3 = petcheval-enea	(2+1)
	4 = petcheval-petcheval	(2+2)

Una situazione analoga, sebbene leggermente più elaborata, è ravvisabile nel caso seguente:

Kamilaroi:	1 = mal	
	2 = bulan	
	3 = guliba	
	4 = bulan-bulan	(2+2)
	5 = bulan-guliba	(2+3)
	6 = guliba-guliba	(3+3)

Bruno D'Amore rileva un'analoga sistemazione dei numerali in uso presso la popolazione Wao dell'America latina (Amazonia ecuatoriana):

Wao:	1 = aruke	
	2 = mea	
	3 = meagoaruke	(2+1)
	4 = meagomea	(2+2)
	5 = emenpuke	
	6 = emenpukegoaruke	(5+1)
	7 = emenpukegomea	(5+2)
	8 = emenpukemeagoaruke	(5+3 = 5+2+1)

$$9 = \text{emenpukemeagomea} \quad (5+4 = 5+2+2)$$

$$10 = \text{tiepenpuke}$$

Queste scritture e le esperienze dalle quali esse traggono origine possono sembrare elementari e primitive, ma il loro studio moderno rivela molti interessanti elementi, come la presenza di sistemi di numerazione in cui coesistono più basi (non è banale il ruolo della base 5 che viene ad affiancarsi alla base 2, come appare evidente nell'ultimo esempio: D'Amore, 1992, p. 6): e da questo punto di vista non possiamo dimenticare il ruolo primario assunto dalla base numerica in ogni fase della storia, anche recente (pensiamo all'uso delle tecnologie), dei procedimenti algoritmici. [**Scheda n. 8. Algoritmi aritmetici elementari**].

La proto-aritmetica non esaurisce comunque il panorama delle radici storiche della Matematica. Ricordiamo che intorno al 25 000 a.C. alla rudimentale Aritmetica, finalizzata esclusivamente al conteggio, si affiancò un'iniziale forma di Geometria: in quell'epoca comparvero infatti le incisioni di disegni geometrici primitivi.

Le testimonianze fin qui citate devono essere considerate nell'ambito della preistoria della Matematica: mancano naturalmente le testimonianze scritte e gli stessi dati desunti, per quanto significativi, sono spesso ipotetici, frutto di interpretazioni e dunque quasi sempre tutt'altro che sicuri. Circa cinque millenni fa fecero la propria comparsa le prime forme di Matematica sviluppata presso gli Egiziani e presso i Babilonesi.

Intorno al 3000 a.C. può infatti essere datata la prima testimonianza matematica scritta conosciuta: sulla sommità dello scettro di Menes, rappresentante della prima dinastia dei Faraoni, troviamo registrate numericamente, con la scrittura a geroglifici, alcune prede di guerra. È significativa la capacità degli Egiziani di rappresentare le grandi quantità attraverso numeri; il bottino del Faraone vincitore comprendeva infatti:

400 000	buoi
1 422 000	capre
120 000	prigionieri (Bunt, Jones & Bedient, 1983).

II-1.3. Le radici: Matematica e Logica

Certamente la Matematica non è riconducibile soltanto all'attività pratica del conteggio, e neppure ai molti suggestivi riferimenti geometrici che possono essere evidenziati nelle incisioni rupestri dell'età paleolitica e neolitica. Di fondamentale importanza è la riflessione sulla stessa argomentazione, sull'apparato ipotetico-deduttivo che consente lo sviluppo di teorie (matematiche) coerenti: dell'analisi di tali aspetti si occupa la Logica, tradizionalmente ricondotta alla fase matura della grande cultura ellenica.

Se le radici storiche della Matematica e della Logica affondano nell'Antichità, altrettanto antica è la stretta connessione tra le due discipline. Scrive a tale proposito Paolo Freguglia:

“Il rapporto fra Logica e Matematica si risolve nella cultura greca in termini di reciproca indipendenza tecnica e dipendenza metodologica della Matematica dalla Logica, nel senso che l'edificazione teorica della prima ha bisogno dei metodi e degli strumenti della seconda” (Freguglia, 1978, p. 4).

Non seguiremo l'evoluzione storica della Logica (rinviamo per questo il lettore ai molti testi citati nella bibliografia); osserviamo comunque che la consapevolezza del legame essenziale tra la Matematica e la Logica si è progressivamente perfezionata lungo il corso della storia della cultura

umana, fino alla precisazione di quello che sarà denominato *programma logicista*, tra la fine del XIX secolo e l'inizio del XX (Russell, 1946; D'Amore & Matteuzzi, 1975; Bagni, 1997). Scriveva Bertrand Russell (1872-1970), uno dei principali protagonisti della ricerca logica, matematica e filosofica di quel periodo:

“La Matematica e la Logica, dal punto di vista storico, sono state due discipline completamente distinte. Comunque tutte e due si sono sviluppate nell'età moderna: la Logica diventando sempre più Matematica e la Matematica sempre più Logica. La conseguenza è che ora è completamente impossibile tracciare tra le due discipline una linea di demarcazione; sostanzialmente le due sono in realtà una disciplina sola” (Russell, 1948, p. 226).

Russell osserva che da ciò si torna a confrontarsi con una questione cruciale, dalle chiare implicazioni filosofiche ed epistemologiche:

“Siamo così portati a porci un problema: che cosa è questo soggetto che può essere chiamato Matematica o Logica? Esiste un modo per definirlo?” (Russell, 1948, p. 229).

Come accennato, la posizione di Russell si inquadra naturalmente in una delle scuole di pensiero che hanno caratterizzato il XX secolo: il *logicismo* è spesso ricondotto all'opera del matematico e filosofo inglese, sebbene talvolta gli storici indichino il logicismo accomunando i nomi di Leibniz, Frege e Russell (Bochenski, 1972). Ecco dunque la risposta che Russell proponeva, nel 1902, alla domanda sopra formulata:

“La Matematica pura è l'insieme di tutte le proposizioni della forma “ p implica q ”, dove p e q sono proposizioni che contengono una o più variabili, né p né q contenendo costanti che non siano costanti logiche. Le costanti logiche sono concetti che si possono definire nei termini di: implicazione, relazione di un termine ad una classe di cui è membro, nozione di “tale che”, nozione di relazione, ed ogni altro concetto implicito nella nozione generale delle proposizioni della forma precedente. Oltre a questi, la Matematica usa un concetto che non fa parte delle proposizioni che essa considera, vale a dire la nozione di verità (...) Il fatto che tutta la Matematica sia Logica simbolica è una delle scoperte più importanti della nostra epoca; una volta stabilita questa circostanza, ciò che resta dei principi della Matematica consiste nell'analisi della Logica simbolica stessa» (traduzione in: Cantini, 1979, pp. 118-119 e 120).

Il programma logicista può essere sintetizzato nel tentativo di ricondurre l'intera Matematica alla Logica; ma tale progetto si rivelò presto impraticabile, almeno nella forma originale (anche per la presenza di alcune inevitabili contraddizioni: le *antinomie*; i tentativi di eludere la formazione delle antinomie della Teoria degli Insiemi portarono all'elaborazione di nuove teorie, la Teorie dei Tipi semplici e ramificati: Lolli, 1985; in effetti la moderna Teoria degli Insiemi viene spesso impostata assiomaticamente, ad esempio nel sistema ZF di Zermelo-Fraenkel: D'Amore & Matteuzzi, 1975; Bagni, 1996, II; ma non approfondiremo la questione).

Le difficoltà incontrate dal programma logicista non possono tuttavia far dimenticare la strettissima connessione che lega la Matematica alla Logica; pertanto qualsiasi lettura storica della Matematica non può prescindere dalla storia della Logica.

L'esame delle radici storiche della Logica non è impresa semplice: infatti se da un lato, tradizionalmente, la Logica antica viene ricondotta alla figura di Aristotele di Stagira (384-322 a.C.), d'altro canto assai vasta si rivela la ricerca storica sulle diverse esperienze culturali (talvolta intrecciate, sovrapposte, addirittura contrastanti) collegate alla riflessione sugli stessi fondamenti

dell'argomentare, all'analisi dei procedimenti che consentono all'uomo il raggiungimento ed il consolidamento della conoscenza razionale.

Ed analogamente a quanto sopra affermato a proposito delle prime forme di attività matematica, uno studio sistematico di tali esperienze culturali non può inoltre non essere basato su considerazioni riguardanti l'indicazione geografica delle aree nelle quali nacque e progressivamente si sviluppò il pensiero logico formale. Illuminante è a tale riguardo un'annotazione di Joseph M. Bochenski, il quale scrive:

“La Logica formale, a quanto si sa, ebbe origine in due e soltanto due regioni culturali: l'Occidente e l'India. Altrove, ad esempio in Cina, si trovano occasionalmente un metodo di discussione e una sofistica, ma non fu mai sviluppata una logica formale nel senso di Aristotele (...) Entrambe queste Logiche si diffusero successivamente ben al di là dei confini delle regioni in cui erano nate (...) Geograficamente, quindi, abbiamo a che fare con due centri vitali di evoluzione per la Logica, la cui influenza si estese con il passare del tempo assai lontano” (Bochenski, 1972, I, p. 24).

Questa autorevole affermazione si concentra dunque su due idee molto interessanti: innanzitutto Bochenski sottolinea che la tradizionale attribuzione ad Aristotele del ruolo di unico “padre” della Logica è quanto meno arbitraria. Se infatti da un lato possiamo affermare che nessuna forma di Logica sistematica è stata elaborata precedentemente alla grande opera aristotelica (Bochenski, 1972, I, pp. 47-48), dobbiamo anche ricordare le importanti ed originali esperienze orientali, grazie alle quali si può propriamente parlare di “due centri vitali di evoluzione per la Logica”. Inoltre, sottolinea ancora Bochenski, “entrambe queste Logiche si diffusero successivamente ben al di là dei confini delle regioni in cui erano nate”: pertanto i contatti tra le diverse culture portarono alla diffusione delle idee e dei risultati ottenuti nonché al loro progressivo affinamento. [**Scheda n. 11. Geografia della Logica matematica**].

II-1.4. Geografia della Matematica: le terne pitagoriche

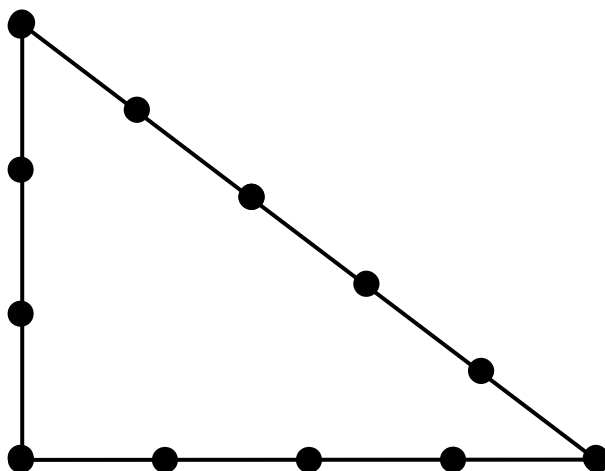
Quanto osservato a proposito delle radici storiche della Logica evidenzia dunque nuovamente l'importanza di una corretta considerazione dell'aspetto geografico nella valutazione dell'evoluzione storica della cultura. Per tornare ora più propriamente alla Matematica, proporremo alcune riflessioni di portata generale attraverso la considerazione di celebri esempi collegati alle grandi tradizioni matematiche dell'Antichità.

Inizieremo con l'occuparci, in particolare, della ricerca delle *terne pitagoriche*, ovvero delle terne di numeri interi positivi:

$$(a; b; c) \quad \text{tali che:} \quad a^2 + b^2 = c^2$$

(Ricordiamo che una terna pitagorica *primitiva* è una terna pitagorica in cui i numeri a , b , c sono coprimi, cioè non hanno alcun fattore comune maggiore di 1; ad esempio, 3, 4, 5 costituisce una terna pitagorica primitiva; invece tutte le terne pitagoriche $3k$, $4k$, $5k$ con k numero intero maggiore di 1 non sono primitive, in quanto i tre numeri considerati hanno il fattore comune k).

In base al teorema di Pitagora, tali terne forniscono le misure dei cateti e dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo. Si noti che anche tale caratteristica determinò l'importanza attribuita alla conoscenza delle terne pitagoriche in molte tradizioni matematiche antiche: mediante una terna pitagorica era infatti semplice tracciare un triangolo rettangolo, ovvero costruire praticamente un angolo retto, come si può constatare dall'esempio seguente (in cui ci basiamo sulla terna pitagorica “classica”, 3, 4, 5).



La storia della ricerca delle terne pitagoriche è molto antica, senza dubbio precedente al periodo (585?-497? a.C.) in cui viene tradizionalmente collocata la figura di Pitagora di Samo. Notiamo incidentalmente che la vita di quest'ultimo ci è nota solo in modo incerto e indiretto, attraverso le testimonianze di Autori quali Platone ed Erodoto; come Talete di Mileto (624?-546? a.C.: la prima persona, a parte il leggendario scriba Ahmes, redattore del papiro Rhind, alla quale la storia attribuisca risultati matematici), Pitagora viaggiò molto: secondo la tradizione si recò in Egitto, a Babilonia e forse addirittura in India; quarantenne, si stabilì a Crotone dove fondò un'importante scuola con le caratteristiche di una confraternita religiosa, filosofica, scientifica e politica. Dopo aspri contrasti con alcune fazioni politiche di Crotone, Pitagora dovette fuggire a Metaponto, dove fu assassinato nel 497 a.C.: ma di tutte queste notizie biografiche mancano riscontri storici inoppugnabili (Boyer, 1982; Kline, 1991). **[Scheda n. 7. I Greci, l'evento supremo].**

A parte le gravi incertezze a proposito dell'attendibilità storica della biografia di Pitagora, interessante e significativo appare l'esplicito collegamento tra la dottrina pitagorica e le culture orientali (per uno studio specifico segnaliamo: Swetz & Kao, 1977). Tale connessione sembra essere effettivamente confermata dalla presenza, accertata, di alcune tecniche per la ricerca delle terne pitagoriche nella Matematica babilonese.

L'esame di alcune delle molte tavolette babilonesi pervenuteci ha dato risultati assai interessanti. Ricorda ad esempio C.B. Boyer:

“Fra le tavolette risalenti al periodo babilonese antico si trovano alcune tabelle contenenti le potenze successive di un dato numero, analoghe alle moderne tavole dei logaritmi o, più esattamente, degli antilogaritmi (...) Una tavoletta contiene, fra gli altri, il problema: a quale potenza va elevato un certo numero perché dia un numero dato? Tale problema è equivalente a quello odierno di calcolare il logaritmo del numero dato in un sistema che ha come base quel certo numero (...) Anche allora le loro *tavole logaritmiche* non venivano usate come metodo generale di calcolo, ma piuttosto per risolvere questioni molto pratiche” (Boyer, 1982, p. 35).

Per considerare le questioni collegate alle terne pitagoriche dovremo riferirci particolarmente alla tavoletta Plimpton 322, databile tra il 1900 ed il 1600 a.C. (Neugebauer, 1974; van der Waerden, 1983, p. 2), uno dei più importanti documenti babilonesi.

In essa troviamo infatti la seguente tabella numerica, in cui i numeri erano riportati con la scrittura cuneiforme (riprendiamo liberamente la tabella da: Joseph, 2000, p. 124):

Colonna 1 (interpretazione incerta)	Colonna 2 (valore a)	Colonna 3 (valore c)	Colonna 4 (num. riga)	Colonna 5 (valore b)
1;59;0;15	1;59	2;49	1	2;0
1;56;56;58;14;50;6;15	56;7	1;20;25	2	57;36
1;55;7;4;1;15;33;45	1;16;41	1;50;49	3	1;20;0
1;53;10;29;32;52;16	3;31;49	5;9;1	4	3;45;0
1;48;54;1;40	1;5	1;37	5	1;12
1;47;6;41;40	5;19	8;1	6	6;0
1;43;11;56;28;26;40	38;11	59;1	7	45;0
1;41;33;33;59;3;45	13;19	20;49	8	16;0
1;38;33;36;36	8;1	12;49	9	10;0
1;35;10;2;28;27;24;26;40	1;22;41	2;16;1	10	1;48;0
1;33;45	45	1;15	11	1;0
1;29;24;54;2;15	27;59	48;49	12	40;0
1;27;0;3;45	2;41	4;49	13	4;0
1;25;48;51;35;6;40	29;31	53;49	14	45;0
1;23;13;46;40	56	1;46	15	1;30

Sottolineiamo che i valori $a(13)$, $c(2)$, $c(6)$, $c(15)$ riportati nella tabella precedente sono stati corretti, in sostituzione di quelli sbagliati della tavoletta originale.

Per interpretare la sequenza di valori numerici riportata nella tavoletta Plimpton 322, prendiamo ora in considerazione i primi valori a , b , c desunti dalle prime righe della tabella:

2; 0	1; 59	2; 49
57; 36	56; 7	1; 20; 25
1; 20; 0	1; 16; 41	1; 50; 49
3; 45; 0	3; 31; 49	5; 9; 1
...	...	...

Si tratta di numeri scritti in base sessagesimale (il primo numero a destra rappresenta le unità; il secondo deve essere moltiplicato per 60; il terzo per 3600); posti in forma decimale, essi sono facilmente riconoscibili come terne pitagoriche:

120;	119;	169	(risulta infatti: $120^2 + 119^2 = 169^2$)
3456;	3367;	4825	(risulta infatti: $3456^2 + 3367^2 = 4825^2$)

4800;	4601;	6649	(risulta infatti: $4800^2 + 4601^2 = 6649^2$)
13500;	12709;	18541	(risulta infatti: $13500^2 + 12709^2 = 18541^2$)
...	...	...	...

La decifrazione della tavoletta Plimpton 322 ha lasciato aperte due questioni: innanzitutto non è stato chiarito il ruolo della prima colonna (qualche studioso ha avanzato l'ipotesi di un suo collegamento con una proto-trigonometria babilonese, ma l'ipotesi, per quanto suggestiva, appare un po' fantasiosa: Joseph, 2000, p. 125); inoltre non conosciamo il procedimento mediante il quale i Babilonesi hanno ricavato le terne pitagoriche riportate.

A tempi più vicini a noi risalgono le formule attribuite a Platone (427-347 a.C.) da *Proclo* di Alessandria (410-485, autore di un *Commento al I libro degli Elementi*: Proclo, 1978), il quale ricorda anche qualche leggendaria ricerca di Pitagora:

$$\begin{aligned} a &= 2x \\ b &= x^2 - 1 \\ c &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

Oggi osserveremmo che per $x = 0$ e $x = 1$ esse non porterebbero a risultati significativi; otterremmo infatti le terne:

$$\begin{aligned} &0, -1, 1 \\ &2, 0, 2; \end{aligned}$$

(Ricordiamo peraltro che 0 e 1 non erano considerati veri e propri “numeri” dai Greci).

Per $x = 2$ otteniamo una terna pitagorica corretta:

$$\begin{aligned} a &= 4 \\ b &= 3 \\ c &= 5 \end{aligned}$$

e si tratta dell'unica terna pitagorica così ottenuta per la quale è:

$$b < a \quad (\text{per tutte le altre terne risulta infatti: } a < b < c)$$

Osserviamo quindi che per x dispari si ottengono terne pitagoriche non primitive (costituite da tre numeri pari):

$x = 3$	$a = 6$	$b = 8$	$c = 10$
(multipla di:	$a = 3$	$b = 4$	$c = 5)$
$x = 4$	$a = 8$	$b = 15$	$c = 17$
$x = 5$	$a = 10$	$b = 24$	$c = 26$

	(multipla di:	$a = 5$	$b = 12$	$c = 13$)
$x = 6$		$a = 12$	$b = 35$	$c = 37$
$x = 7$		$a = 14$	$b = 48$	$c = 50$
	(multipla di:	$a = 7$	$b = 24$	$c = 25$)
...		...	...	...

Si dimostra che applicando le formule attribuite a Platone si trovano tutte le terne pitagoriche della forma

$$a; b; b+2$$

ma non tutte le terne pitagoriche (primitive) hanno tale caratteristica.

Dunque le formule platoniche superano la ricerca del semplice esempio per concentrarsi su di un procedimento in grado di fornire molte (infinite) soluzioni; ma nonostante l'evidente importanza teorica, esse non forniscono una completa soluzione al problema della determinazione di terne pitagoriche.

Per trovare la risoluzione completa del problema presentato dobbiamo fare nuovamente ricorso ad esperienze culturali extraeuropee e considerare un testo cinese del periodo Han collocabile tra il 200 a.C. e il 220 d.C. (van der Waerden, 1983, pp. 1 e 5-8; Martzloff, 1987; Needham, 1985; osserviamo però che la datazione delle opere matematiche cinesi è sempre impresa delicata: il materiale riportato nella redazione finale di un'opera potrebbe infatti essere stato rielaborato da lavori precedenti e quindi essere più antico).

La Matematica cinese è ricca di procedimenti apparentemente ludici, collegati a situazioni pratiche o a curiosità. [**Scheda n. 6. I quadrati magici cinesi**]. Ma, come avremo presto occasione di verificare, a tali procedimenti sono spesso associati contenuti matematici profondi e importanti.

Illustriamo innanzitutto la soluzione cinese del problema della determinazione delle terne pitagoriche. Dopo avere scritto:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{da cui:} \quad (c+b)(c-b) = a^2$$

consideriamo un numero dispari come prodotto di due fattori:

$$a = mn$$

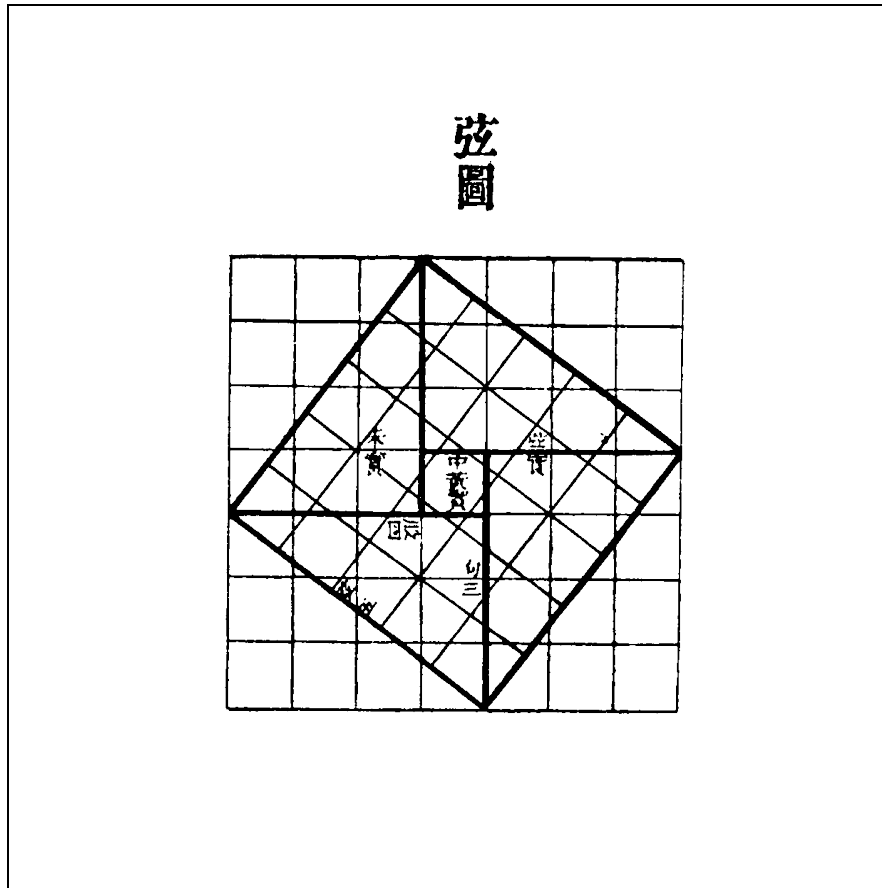
L'ultima equazione è verificata da:

$$\begin{array}{ll} c+b = m^2 & \text{da cui:} \quad c = \frac{1}{2}(m^2+n^2) \\ c-b = n^2 & b = \frac{1}{2}(m^2-n^2) \end{array}$$

Ad esempio possiamo scrivere:

$$\begin{array}{ll} a = 3 \cdot 1 = 3 & \text{da cui:} \quad b = 4 \quad \text{e} \quad c = 5 \\ a = 5 \cdot 1 = 5 & \text{da cui:} \quad b = 12 \quad \text{e} \quad c = 13 \end{array}$$

$$a = 5 \cdot 3 = 15 \quad \text{da cui:} \quad b = 8 \quad \text{e} \quad c = 17$$



Il Teorema di Pitagora come appare nel trattato cinese
Chou Pei Suan Ching

Storicamente molto interessante è osservare che un'analogia impostazione della questione, e quindi un'analogia sua soluzione, compare nel Problema I del VI libro dell'*Aritmetica* di Diofanto di Alessandria (vissuto tra il 250 e il 350 d.C.).

La soluzione diofantea parte dalla considerazione di un numero pari:

$$a = 2pq$$

L'equazione:

$$(c+b)(c-b) = a^2$$

può essere verificata da:

$$\begin{array}{ll} c+b=2p^2 & c=p^2+q^2 \\ \text{da cui:} & \\ c-b=2q^2 & b=p^2-q^2 \end{array}$$

Al lettore non sfuggirà l'evidente analogia dei due procedimenti: la soluzione cinese, sopra indicata, equivale alla soluzione diofantea sostituendo:

$$(m, n) \quad \text{con} \quad (p+q; p-q).$$

È possibile dimostrare che le due soluzioni del problema della determinazione delle terne pitagoriche così ottenute (sia quella cinese che quella diofantea) hanno il requisito della generalità che mancava alla soluzione platonica: ciò significa che *tutte le terne pitagoriche primitive* possono essere ottenute dalle formule ricordate (van der Waerden, 1983, p. 2). Per confermare dunque il valore del procedimento diofanteo (e dell'analogo procedimento cinese), proponiamo il ricavo delle formule utilizzate in termini moderni.

Ovviamente una verifica diretta non può essere considerata alla stregua di un *ricavo* delle formule in questione. In altri termini, affinché una verifica di tali formule abbia senso, e sia ad esempio didatticamente proponibile, è indispensabile che esse siano note, cioè che siano state precedentemente intuite.

Le formule diofantee possono essere efficacemente ricavate nell'ambito della moderna geometria analitica considerando l'intersezione della circonferenza di raggio unitario avente centro nell'origine degli assi e di una retta passante per il punto di coordinate $(0; -1)$ con il coefficiente angolare t non nullo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y + 1 = tx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (tx - 1)^2 = 1 \\ y = tx - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2t}{t^2 + 1} \\ y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \end{cases}$$

Se: $t = \frac{a}{b}$:

$$\begin{cases} x = \frac{2 \frac{a}{b}}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1} \\ y = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2ab}{a^2 + b^2} \\ y = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

e in coordinate omogenee:

$$\begin{cases} x = 2ab \\ y = a^2 - b^2 \\ z = a^2 + b^2 \end{cases}$$

Quello ora accennato è un procedimento che presuppone alcune conoscenze non del tutto banali. Più elegante e più semplice è il procedimento seguente.

Data l'equazione diofantea:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

cercheremo le sue soluzioni (interi) supponendo che:

$$\text{MCD}(x; y; z) = 1$$

cioè ci occuperemo delle terne pitagoriche primitive (ciò non è restrittivo).

Tale assunzione comporta che x e y non siano entrambi pari, in quanto se lo fossero risulterebbe pari anche z , contro l'ipotesi che vuole 1 il $\text{MCD}(x; y; z)$. Inoltre x, y non possono essere entrambi dispari; se così fosse, ovvero se

$$x = 2m+1 \quad \text{e} \quad y = 2n+1$$

avremmo:

$$z^2 = (2m+1)^2 + (2n+1)^2 = 2(2m^2 + 2n^2 + 2m + 2n + 1)$$

ovvero z^2 risulterebbe il doppio di un numero dispari: ciò sarebbe impossibile (in quanto tale numero, avendo uno ed un solo fattore 2, non sarebbe un quadrato). Scriviamo quindi:

$$x = 2\alpha$$

$$y = 2\beta + 1$$

da cui segue:

$$4\alpha^2 = z^2 - y^2$$

$$\alpha^2 = \frac{z+y}{2} \cdot \frac{z-y}{2}$$

Mostriamo ora che i due numeri $\frac{z+y}{2}$ e $\frac{z-y}{2}$ devono essere coprimi; se infatti così non fosse, risulterebbe:

$$\frac{z+y}{2} = pq$$

$$\frac{z - y}{2} = ps$$

da cui:

$$\begin{cases} y = p(q + s) \\ z = p(q - s) \end{cases}$$

contro l'ipotesi che sia 1 il MCD($x; y; z$).

Attraverso le opportune posizioni possiamo quindi scrivere:

$$\begin{cases} \frac{z + y}{2} = a^2 \\ \frac{z - y}{2} = b^2 \end{cases}$$

e infine:

$$\begin{cases} x = 2ab \\ y = a^2 - b^2 \\ z = a^2 + b^2 \end{cases}$$

formule nelle quali è condensata la soluzione diofantea (e, con le segnalate sostituzioni, quella cinese) della determinazione di terne pitagoriche.

La stretta analogia delle due soluzioni precedentemente illustrate non può non stimolare alcuni interrogativi, il primo dei quali (ma non necessariamente il più importante) riguarda la priorità cronologica. Esaminando le datazioni riportate rileviamo che la soluzione cinese del problema sembra essere la più antica tra le due soluzioni complete. Viene quindi spontaneo domandarsi: in generale, quale influenza possono avere avuto i Cinesi nello sviluppo della Matematica di altre antiche civiltà, orientali e occidentali? Più particolarmente, quali legami possiamo ipotizzare (ed eventualmente verificare) tra i solutori cinesi del problema delle terne pitagoriche e l'ambiente in cui è maturata quella diofantea?

È opinione oggi abbastanza diffusa (citiamo ad esempio: Boyer, 1982; Struik, 1981) che l'antica Matematica cinese abbia avuto un'influenza sostanzialmente trascurabile sullo sviluppo della Matematica del mondo occidentale. Tuttavia le affermazioni in tale direzione potrebbero rivelarsi affrettate: per quanto riguarda la Matematica cinese, infatti, una fonte assolutamente autorevole è il grande trattato di J. Needham ed in tale opera (Needham, 1985) troviamo alcuni riferimenti interessanti sui

“contatti che sembra vi siano stati fra matematici cinesi e di altre grandi aree culturali del mondo antico [sebbene] in misura limitata” (Needham, 1985, p. 183).

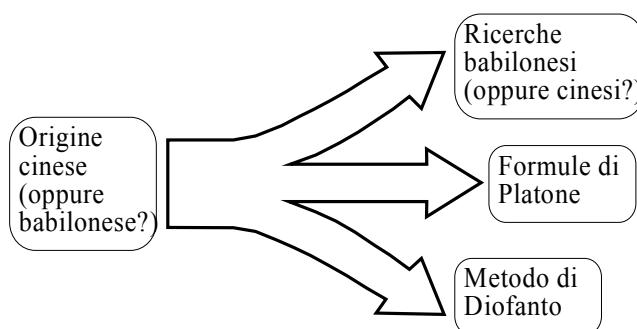
[Scheda n. 3. Influenze della Matematica cinese su altre civiltà]. Needham parla di alcune

“concezioni matematiche propagate dalla Cina verso il Meridione [dunque verso l’India] e verso l’Occidente” (Needham, 1985, p. 185)

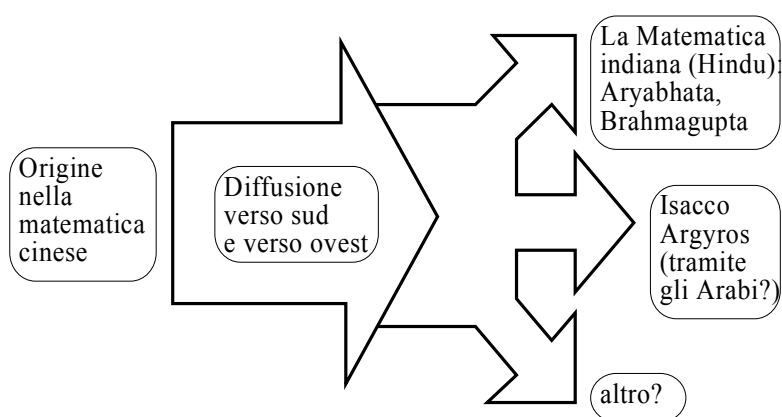
e ricorda i numerali, l’estrazione di radici quadrate e cubiche, la *regola del tre*, la scrittura di frazioni, l’idea di numeri negativi, alcuni elementi di Geometria (tra i quali una dimostrazione del teorema di Pitagora), il metodo di *falsa posizione* e la celebre disposizione di coefficienti binomiali che viene tuttora chiamata *triangolo di Tartaglia-Pascal*.

Per quanto riguarda l’Analisi indeterminata (settore al quale possiamo far risalire i procedimenti di ricerca delle terne pitagoriche), sembra che dalla Cina siano passate alcune idee in India (intorno al V-VII secolo d.C.) e da lì, forse, al monaco bizantino Isacco Argyros (XIV secolo), probabilmente con la mediazione di studiosi arabi (Needham, 1985, p. 185). [**Scheda n. 4. Influenze di altre civiltà sulla Matematica cinese**].

Dunque possiamo così ipotizzare gli eventuali contatti che avrebbero portato i matematici occidentali a conoscere le originali ricerche cinesi (oppure babilonesi) sulle terne pitagoriche; alcuni secoli prima dell’inizio dell’Era volgare, ad esempio, avrebbe potuto avvenire quanto rappresentato nello schema seguente:



Alcuni secoli dopo l’inizio dell’Era Volgare, invece, avrebbe potuto verificarsi la situazione così schematizzata:



Le due possibilità ora presentate devono essere considerate, come sopra osservato, a livello di semplici (plausibili) ipotesi. Esse non eludono dunque un quesito fondamentale e dalle vaste implicazioni: le

ricerche sulle terne pitagoriche (e più in generale tutte le ricerche che, nelle varie epoche storiche, hanno portato all'elaborazione di teorie matematiche simili in ambiti culturali diversi) sono comunque da porre in relazione reciproca o possono essere considerate frutto di iniziative indipendenti, autonome l'una dall'altra?

L'ipotesi della comune origine (probabilmente cinese) delle ricerche sulle terne pitagoriche è sostenuta da B.L. van der Waerden, il quale osserva che

“con pochissime eccezioni, le grandi scoperte in Matematica, in Fisica e in Astronomia sono state fatte una volta sola” (van der Waerden, 1983, p. 10).

Pur senza voler smentire l'ipotesi di van der Waerden, peraltro sostenibile, non possiamo non osservare che la ricerca di terne pitagoriche è una questione che può sorgere spontaneamente, anche per ragioni pratiche (la segnalata necessità di costruire facilmente un angolo retto): il fatto di trovare molti matematici che, in epoche ed in paesi diversi, si sono interessati ad essa non ci dovrebbe dunque sorprendere e non ci sembra un elemento determinante per propendere per una comune origine delle varie ricerche in tale campo.

Inoltre, a nostro avviso, resta la possibilità di non optare rigidamente per una delle due posizioni sopra illustrate: la presenza di atteggiamenti ed approcci simili in tradizioni culturali diverse non prevede obbligatoriamente una trasmissione diretta, integrale di risultati e di procedimenti né un'assoluta indipendenza reciproca delle ricerche considerate. Una terza via potrebbe infatti essere quella di una parziale trasmissione, della comunicazione di spunti, di idee guida, di intuizioni: spunti ed intuizioni che, correttamente sviluppati in ambienti culturali diversi, talvolta hanno potuto portare a risultati fecondi e allo sviluppo di teorie anche notevolmente simili.

Concludendo questa breve rassegna, non pretendiamo di dare una risposta ai molti interrogativi che ancora restano a proposito dell'origine e dello sviluppo delle ricerche sulle terne pitagoriche.

Riteniamo però significativa la presenza stessa di tali questioni aperte.

Completiamo questa sezione osservando che la ricostruzione scientifica della Matematica antica dai punti di vista storico e geografico non è sempre agevole e le difficoltà che si presentano a tale riguardo sono spesso collegate all'assenza di testi scritti databili con sicurezza. Diversa è la situazione in tempi più vicini a noi: i contatti tra le diverse tradizioni culturali possono essere facilmente ricostruiti e lo sviluppo storico di idee e di teorie risente di influenze più precise, analizzabili con certezza e chiaramente documentabili. Ci occuperemo nel paragrafo successivo di un'altra questione classica della storia della Matematica, questione della quale si riscontra la presenza in moltissimi testi ed in molte traduzioni culturali, in tutto il mondo.

II-1.5. Geografia della Matematica: il calcolo di *pi* greco

Anche a Dante Alighieri (1265-1321) spetta un posto nella storia della Matematica?

La citazione del sommo Poeta è giustificata dal fatto che egli, nella *Divina Commedia*, propose un riferimento al celebre problema della quadratura del cerchio, cioè della determinazione, con l'uso esclusivo della riga non graduata e del compasso, di un quadrato avente la stessa area di un cerchio assegnato:

“Qual è ‘l geomètra che tutto s’affigge
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond’elli indige,

tal era io a quella vista nova;
veder volea come si convenne

l'immagine al cerchio e come vi s'indovava"

(*Paradiso*, XXXIII, 133-138)

Dell'impossibile problema Dante fornì anche una parziale collocazione storica citando (*Paradiso*, XIII, 124-127) il sofista Brissonne (o Brisone, V sec. a.C., forse discepolo di Euclide) che secondo Gino Loria

“fece sforzi per risolvere il problema della quadratura del cerchio, i quali, benché lo abbiano condotto ad errori (...) contengono nel proprio seno un germe fecondo: l'uso dei poligoni inscritti e circoscritti, di cui poi Archimede fece sì mirabile applicazione” (Loria, 1929-1933, p. 35; Kline, 1991, p. 52).

Come precedentemente accennato, i tentativi di approssimazione di una delle più celebri costanti della Matematica, il rapporto tra le misure di una circonferenza e del suo diametro, sono presenti in molte tradizioni culturali. Osserviamo che dal punto di vista cronologico l'adozione del simbolo π per indicare tale rapporto è relativamente tarda: va fatta risalire a *Synopsis palmariorum matheseos*, opera pubblicata a Londra nel 1706 da William Jones (1675-1749); ma le radici storiche del problema sono molto più antiche.

Nella Bibbia è riportato che Salomone (X secolo a.C.) commissionò a Chiram di Tiro un bacino di bronzo del quale sono indicate le misure:

“Fece un bacino di metallo fuso di dieci cubiti da un orlo all'altro, rotondo; la sua altezza era di cinque cubiti e la sua circonferenza di trenta cubiti” (1 Re, 7, 23; si veda inoltre il passo parallelo: 2 Cronache, 4, 2).

Quanto affermato equivale evidentemente a considerare pari a 3 il rapporto tra la misura della circonferenza e quella del suo diametro. Ma questo riferimento biblico alla rettificazione della circonferenza non è il più antico.

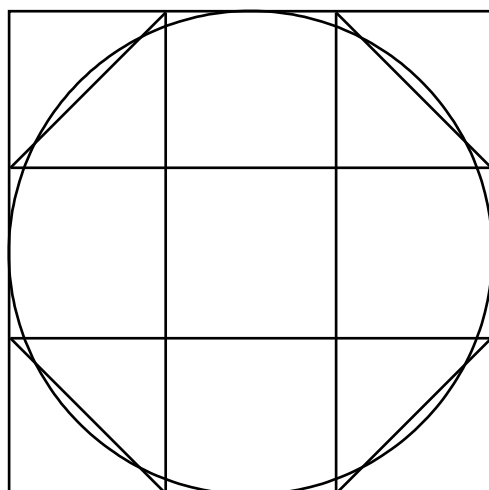
Anche presso i Babilonesi è inizialmente accettato, per π , il valore 3; ma in una tavoletta scoperta nel 1936 a Susa, 350 km ad est di Babilonia, si trova un elenco di dati sulla misura del raggio di un cerchio basata sulla misura del perimetro dell'esagono regolare inscritto, che sarebbe equivalente all'approssimazione di π con il valore 3,125 (gli studi di E.M. Bruins, pubblicati nel 1950, sono riportati in: Neugebauer, 1974).

Nel papiro Rhind, il documento fondamentale della matematica egiziana risalente al 1650 a.C. (ma probabilmente una copia di un precedente documento, databile intorno al 2000-1800 a.C.), troviamo alcuni problemi risolti secondo la regola seguente:

$$\text{Area del cerchio} = \left(d \text{ i a m} - \frac{d \text{ i a m}}{9} \right)^2$$

che equivale ad approssimare π con 3,16049... (osserviamo che tale valore non è indicato come costante, ma è solamente desumibile dall'esempio pratico proposto).

Una giustificazione della formula ora ricordata può essere la seguente, basata sulla considerazione del quadrato circoscritto al cerchio considerato (sottolineiamo comunque che quella che esporremo è di un'ipotesi moderna, che riprendiamo da: Bunt, Jones & Bedient, 1983).



Dividendo il quadrato circoscritto in nove quadratini uguali, si può valutare l'area del cerchio con la formula seguente:

$$\text{Area del cerchio} \cong \frac{7}{9} \cdot (2r)^2 = \frac{63}{81} \cdot (2r)^2 \cong \frac{64}{81} \cdot (2r)^2 = \left(\frac{16}{9} r \right)^2$$

(dove il cerchio è stato identificato, in termini di approssimazione, nell'ottagono non regolare equivalente a sette quadratini). Si noti che l'approssimazione geometricamente impostata in modo analogo (ma effettuata con un solo passaggio) che porta alla valutazione:

$$A \cong \frac{7}{9} \cdot (2r)^2 = \frac{28}{9} \cdot r^2$$

sarebbe equivalente ad adottare per π il valore 3,1111... (ma non darebbe forse la possibilità di impiegare esclusivamente frazioni con numeratore unitario, scelta caratteristica della Matematica dell'antico Egitto).

Il più semplice ed efficace approccio al problema del calcolo di π , adottato, nel corso dei secoli, da molti grandi ricercatori, si collega però proprio agli antichi tentativi del sofista Brissonne e consiste nell'approssimare il cerchio con una successione opportuna di poligoni regolari inscritti e circoscritti alla circonferenza considerata: al crescere del numero dei lati di questi diminuisce progressivamente la differenza tra l'area del poligono e l'area del cerchio, nonché tra la misura del perimetro del poligono e quella della circonferenza.

Archimede di Siracusa (287-212 a.C.), proprio considerando una sequenza di poligoni regolari fino a quello di 96 lati, giunse ad individuare una coppia di limitazioni per π , che così esprimiamo in notazione moderna:

$$3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$$

Per quanto ne sappiamo, uno dei più precisi valori di π calcolati nell'Età antica è dovuto a Claudio Tolomeo, che intorno al 150 d.C., nell'*Almagesto* (VI, 7) propose 3,1416: notiamo che lo stesso valore nella forma:

sarà adottato dall'indiano Aryabhata, tra il V ed il VI secolo (Kline, 1991). Anche i matematici cinesi, intorno al 260, ottennero un valore analogo.

Cronologicamente tra la fine dell'Antichità e l'inizio del Medioevo si colloca un'altra opera cinese dedicata all'approssimazione di π , *Tsu Chhung Chih* (430-501), un trattatello che ci è pervenuto incompleto. L'approssimazione raggiunta, notevolissima, è:

$$3,1415926 < \pi < 3,1415927$$

ed venne ottenuta sempre valutando il perimetro di poligoni regolari inscritti in una circonferenza (fino a poligoni di 24576 lati).

Una valutazione critica moderna dei citati risultati, sia dal punto di vista teorico che da quello pratico, non può ovviamente prescindere dalla considerazione dei vari ambienti socio-culturali coinvolti e delle caratteristiche delle comunità matematiche delle aree geografiche e dei periodi storici in cui tali ricerche sono collocate. Osserva giustamente P.J. Davis:

“Non sembra che gli antichi abbiano avuto molto successo o molto interesse a calcolare π con molta precisione. Forse i loro metodi, un po' scomodi sebbene teoricamente perfetti, li ostacolarono. Forse furono messi in difficoltà dal loro sistema di numerazione, che era ancor più scomodo. Forse consideravano il problema da un punto di vista troppo pratico e non incontrarono mai un problema che richiedesse una risposta tanto precisa” (Davis, 1965, p. 74).

Quattordici secoli dopo Tolomeo rinasce l'interesse per il calcolo approssimato di π , in Europa con François Viète (1540-1603), Adrien van Roomen (1561-1615), Ludolph van Ceulen (1540-1610) e Willebrod Snell (1581-1614), ma anche in India (Madhava) e in Persia (al-Kashi). I procedimenti sono ancora legati all'approssimazione del cerchio mediante poligoni regolari inscritti o circoscritti; ma la scrittura dei numeri in forma decimale e l'uso di frazioni sono strumenti operativamente preziosi e consentono di raggiungere gradi di precisione assai più elevati di quelli conseguiti nell'Antichità. Per quanto riguarda le esperienze precedenti il 1600, riassumiamo la storia delle approssimazioni di π nella seguente tabella (che riprendiamo liberamente da: Joseph, 2000, pp. 192-193):

Data	Fonte	Collocazione geografica	Procedimento usato	Valore approssimato ottenuto
1650 a.C. circa	Papiro Rhind (papiro di Ahmes)	Egitto	Si considerano equivalenti un campo circolare con diametro di 9 unità ed uno quadrato con lato di 8 unità	3,16 circa
1600 a.C. circa	Tavoletta di Susa	Babilonia	Equiparazione di un esagono ad un cerchio	3,125
800-500 a.C.	Sulvasutra	India	Baudhayana esprime la seguente relazione tra il lato s di un quadrato e il diametro d di un cerchio: $s = d[1 - 28/(8 \times 29) - 1/(6 \times 8 \times 29)] + 1/(6 \times 8 \times 29 \times 8)$	3,09 circa

250 a.C. circa	Archimede	Grecia	Calcolo di perimetri di poligoni regolari (96 lati) inscritti e circoscritti a un cerchio	$223/71 < \pi < 22/7$
150 a.C. circa	Umasvati	India	Considerazione di esagoni e dodecagoni regolari inscritti	3,16 circa
260 d.C. circa	Liu Hui	Cina	Considerazione di poligoni regolari inscritti e applicazione del Teorema di Pitagora	3,1416 circa
480 circa	Tsu Chhung-Chih	Cina	Metodo simile al precedente, ma giungendo a considerare poligoni regolari inscritti fino a 24576 lati	$3,1415926 < \pi < 3,1415927$
500 circa	Aryabhata (ma lo stesso valore è presente in Tolomeo, 150 d.C.)	India	Probabilmente considerazione di poligoni regolari di 384 lati	3,1416 circa
1400 circa	Madhava	India	Utilizzazione di uno sviluppo in serie infinita	valore esatto all'undicesima cifra decimale
1429	al-Kashi	Persia	Probabilmente considerazione dei perimetri di poligoni regolari fino a 3×2^{28} lati	valore esatto alla sedicesima cifra decimale
1579	François Viète	Francia	Calcolo del perimetro di un poligono regolare con 393216 lati	valore esatto alla nona cifra decimale

Presentiamo infine un brillante procedimento geometrico dovuto a Srinivasa Ramanujan (1887-1920: ci occuperemo del grande matematico indiano nel paragrafo II-1.10) e collegato all'antico problema della quadratura del cerchio; nell'articolo *Squaring the Circle*, pubblicato nel 1913 (e riedito in: Hardy, Seshu Aiyar & Wilson, 1927, p. 22), Ramanujan scrive:

“Dato il cerchio di centro O e diametro PR, sia H punto medio di PO e T tale che OT = 2TR. Sia TQ semicorda perpendicolare a PR e RS corda tale che RS = TQ. Siano M, N punti di PS in modo che OM e TN siano parallele a RS. Si traccino come nella figura la corda PK = PM, la tangente PL = MN e i segmenti RL, LK, KL. Sia RC = RH. Si conduca infine la parallela CD a KL che incontra RL nel punto D. Allora il quadrato costruito su RD sarà approssimativamente equivalente al cerchio assegnato” (Ramanujan, 1913, p. 132, traduzione di G.T. Bagni).

Posto dunque $PR = d$ (con riferimento alla figura), l'Autore nota che:

$$RS^2 = \frac{5}{36} d^2$$

$$\frac{RK}{RL} = \frac{RC}{RD} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{113}{355}} \quad \text{e} \quad RC = \frac{3}{4} d$$

risulta infine:

$$RD = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{355}{113}}, \text{ molto vicino a } \frac{d}{2} \sqrt{\pi}.$$

Infatti:

$$\frac{355}{113} = 3,14159292$$

e la sua differenza da π è 0,00000026...

Lo stesso Ramanujan osserva, in una nota, che

“se l’area del cerchio considerato è di 140000 miglia quadrate, allora RD risulta una valutazione per eccesso di circa un pollice” (Ramanujan, 1913, p. 132).

Si noti che, dal punto di vista numerico, il valore $\frac{355}{113}$ può essere desunto dalle ricerche di Tolomeo e di Aryabhata e può inoltre essere ricavato dallo sviluppo di π in frazione continua (Struik, 1981, p. 106). Tutto ciò ovviamente non sminuisce il valore della bella costruzione geometrica indicata da Ramanujan, la cui semplicità consentirebbe una presentazione didattica anche a livello della scuola secondaria!

Osserviamo infine che la ricerca delle approssimazioni di π (che abbiamo verificato essere un classico tema dell’antica ricerca matematica orientale, dalla Cina all’India; si veda: Needham, 1985; Martzloff, 1997; Joseph, 2000) compare in molti altri lavori di Ramanujan; un’altra interessante approssimazione è ad esempio:

$$\left(9^2 + \frac{19^2}{22} \right)^{\frac{1}{4}} = 3,14159265262...$$

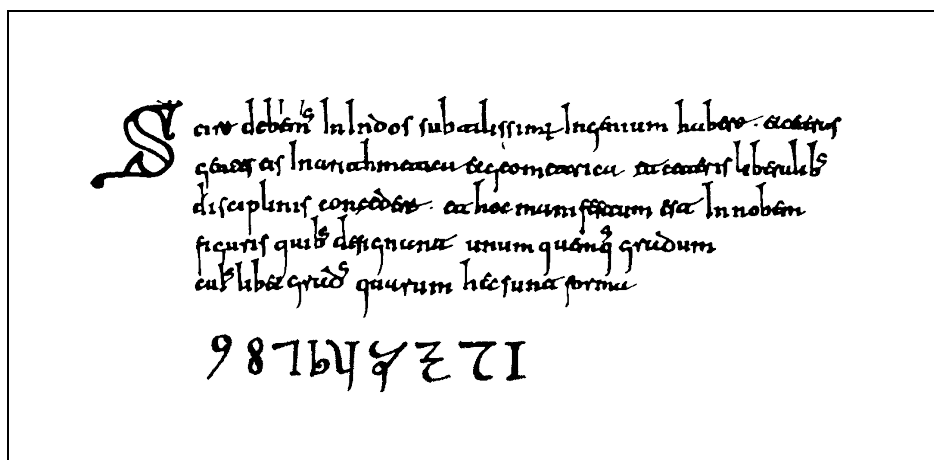
che l’Autore afferma di avere ricavato “empiricamente” (si veda: Hardy, Seshu Aiyar & Wilson, 1927, p. 35).

II-1.6. La notazione numerica

Come abbiamo constatato, l’Aritmetica è, insieme alla Geometria, la forma più antica di attività matematica e sarebbe dunque molto lungo ripercorrere completamente la sua storia (rinviamo per questo ai manuali disponibili, alcuni dei quali sono citati nel paragrafo dedicato ai riferimenti bibliografici: Struik, 1981; Ifrah, 1989; Kline 1991). Ci limitiamo a notare che nel Medioevo, anche prima dell’introduzione della stampa a caratteri mobili, furono resi pubblici numerosi manuali di Aritmetica (Veratti, 1860; Baldi, 1998): tra tali opere ricordiamo il celebre ed importante *Liber Abaci* di Fibonacci (Leonardo Bigollo da Pisa, 1180?-1250), pubblicato nel 1202 e riedito nel 1228; sarà pubblicato a stampa solo nel XIX secolo (si veda: Sigler, 2002; l’opera di Fibonacci viene esaminata dal punto di vista didattico in: Grugnetti, 2000).

Fibonacci fu certamente un grande protagonista della Matematica medievale; a lui è in generale ricondotta l'introduzione in Europa della notazione numerica posizionale indo-araba, in sostituzione della scomoda ed obsoleta notazione romana (ma segnaliamo a tale proposito anche l'importante contributo di Abraham ibn Ezra, studioso ebraico autore di *Sefer ha-mispar*, una delle prime esposizioni comparse in ambiente europeo che trattino del sistema di numerazione indo-arabo, opera scritta anteriormente al 1160 e dunque almeno quarant'anni prima del *Liber Abaci*: Joseph, 2000, p. 414). [Scheda n. 10. Fibonacci].

Tuttavia, dal punto di vista storico, affermare che le origini della notazione numerica posizionale (e l'importante idea, ad essa collegata, di un simbolo per lo zero) risalgano esclusivamente alla tradizione matematica indiana è semplicistico; ed una simile affermazione, se non adeguatamente commentata, appare addirittura errata.



Le cifre indo-arabe in un manoscritto spagnolo del 976
(si osservi che il simbolo per indicare lo zero non compare)

Dobbiamo ad esempio ricordare che anche la notazione numerica per esprimere gli intervalli di tempo nel calendario Maya sfruttava una notazione di tipo posizionale, in cui i simboli erano incolonnati verticalmente; essa prevedeva l'indicazione delle unità mediante dei punti, mentre con delle sbarrette orizzontali erano indicati i gruppi di cinque unità; la base principale era 20 (il 5 era quindi impiegato come base secondaria).

In tale sistema numerico era inoltre utilizzato un apposito simbolo, a forma di occhio semiaperto, per indicare le posizioni vuote, e dunque lo zero (Boyer, 1982, p. 251).

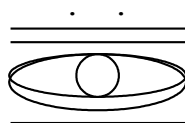
[Scheda n. 5. Storia e geografia dello zero]. Il sistema Maya era espressamente concepito per il computo dei giorni di un anno (o di più anni); ciò comportava un'interessante variazione rispetto all'impiego rigoroso della base 20. Essendo 360 (più i 5 giorni nefasti) il numero dei giorni dell'anno Maya:

la prima posizione (la più bassa) indicava le unità (dunque i giorni veri e propri);

la seconda posizione indicava le ventine di giorni (mesi);

la terza posizione non indicava i gruppi di 20·20 giorni, bensì i gruppi di 20·18 giorni (20·18 = 360, che è il numero dei giorni non nefasti dell'anno Maya).

Pertanto, ad esempio, con il simbolo Maya:



era rappresentato il numero (di giorni):

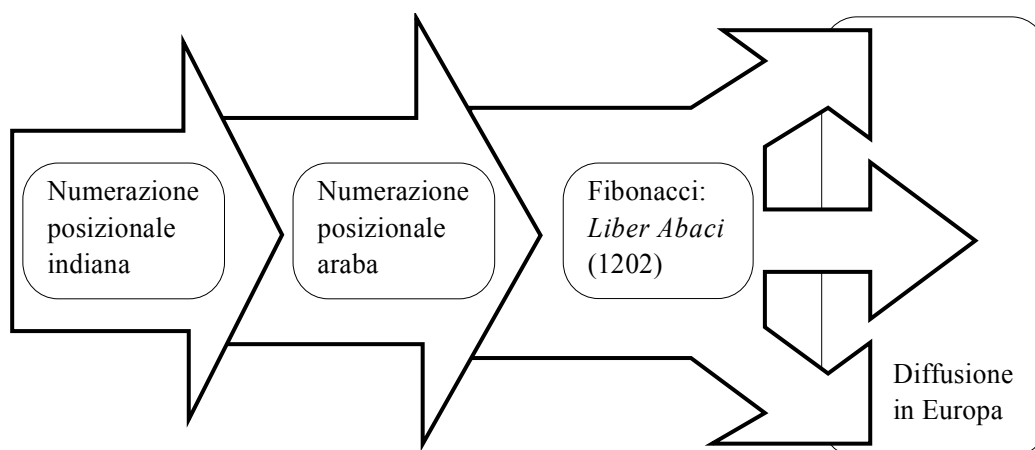
$$(2 \cdot 5 + 2) \cdot 20 \cdot 18 + 0 \cdot 20 + 5 = 4325$$

corrispondente a:

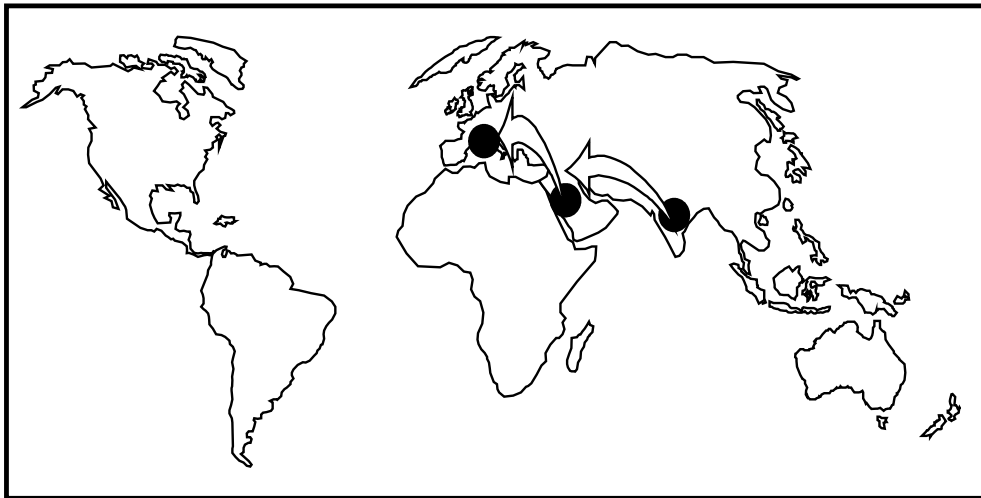
12	anni	(nel simbolo, in alto)
0	mesi (ventine di giorni)	(nel simbolo, al centro)
5	giorni	(nel simbolo, in basso)

La civiltà dei Maya fu una delle più importanti esperienze culturali del continente americano; essa ebbe una storia assai lunga e ricca, generalmente suddivisa addirittura in tre fasi: un periodo preclassico (dal 1500 a.C. al 250 d.C.), un periodo classico (dal 250 al 1200) ed infine un periodo postclassico (dal 1200 fino alla *conquista*).

Ma la cultura Maya non ebbe la possibilità di trovare contatti esterni significativi, ad esempio al di fuori del continente americano, fino alla drammatica *conquista* spagnola: per questa ragione può dunque risultare accettabile la considerazione di uno schema come il seguente per sintetizzare l'introduzione della notazione numerica posizionale indiana, attraverso la mediazione araba, nell'Europa medievale, schema in cui la tradizione culturale dell'America precolombiana non viene considerata.



Dal punto di vista geografico, dunque, la connessione può essere così schematizzata:



Appare pertanto innegabile che gli Arabi ebbero un importante ruolo di collegamento tra mondi culturali assai diversi e distanti. Ma sarebbe pesantemente riduttivo limitare a ciò il contributo arabo alla storia della Matematica (Berggren, 1986).

Se l'effettiva originalità dei contributi arabi allo sviluppo della nostra disciplina è questione tuttora dibattuta (ma ampi settori della storiografia moderna sembrano ormai nutrire ben pochi dubbi e si schierano in favore di tale originalità: Joseph, 2000), possiamo comunque affermare che una parte rilevante dell'esperienza matematica del mondo antico ebbe garantita la sopravvivenza proprio grazie all'azione politica e culturale degli Arabi (come è sottolineato ad esempio in: Ifrah, 1989; Kline 1991; Bagni 1996, I).

M. Kline sintetizza correttamente il ruolo che deve essere riconosciuto agli studiosi del mondo arabo nella storia della Matematica:

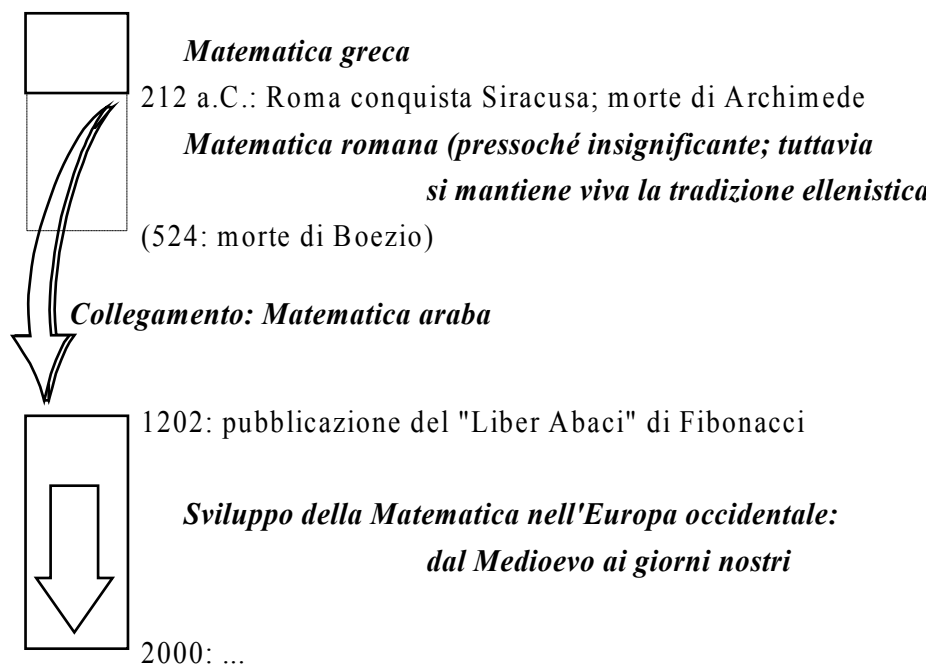
“Una volta completate le loro conquiste, gli antichi nomadi si diedero a costruire una civiltà e una cultura e piuttosto rapidamente svilupparono un crescente interesse per le arti e le scienze. (...) Le risorse culturali che gli Arabi avevano a loro disposizione erano considerevoli. (...) Si suole parlare della Matematica araba, ma essa era araba essenzialmente soltanto di lingua. La maggior parte degli studiosi erano greci, cristiani, persiani ed ebrei. Bisogna tuttavia dare atto agli Arabi della generosità con cui, dopo il periodo della conquista (...) trattarono le altre popolazioni (...) tant'è vero che gli infedeli poterono lavorare liberamente. (...) Gli Arabi si dedicarono anche a migliorare le traduzioni già esistenti e scrissero dei commentari. Furono queste traduzioni, alcune delle quali giunte fino a noi, che passarono più tardi in Europa quando gli originali greci erano già andati perduti” (Kline, 1991, I, pp. 223-224).

Effettuate tali precisazioni, è usuale fare riferimento alla Matematica araba intendendo con tale denominazione l'opera di ricerca, di rielaborazione o di traduzione di tutti coloro i quali, indipendentemente dall'origine o dalla religione professata, scrissero in arabo. Quindi l'opera di trasmissione culturale degli Arabi non si può intendere esclusivamente in termini di connessione geografica, facendo riferimento all'asse India-Europa lungo il quale si è propagata la fondamentale innovazione della notazione numerica posizionale.

Tuttavia è necessario e istruttivo ricordare che un'improponibile storia della Matematica impostata in termini “esclusivamente occidentali” verrebbe ad essere gravemente spezzata dalla presenza di alcuni secoli durante i quali (indipendentemente da una valutazione culturale a più ampio spettro, che

sicuramente non può essere liquidata troppo sbrigativamente) la ricerca e la stessa attività matematica sembra essere assai ridotta.

Visualizziamo nello schema seguente il ruolo essenziale svolto dalla Matematica araba in termini di collegamento (ideale, ma anche pratico) tra la grande tradizione antica e la Matematica sviluppatasi nell'Europa occidentale all'inizio del Medioevo:



II-1.7. Aritmetica pratica nelle tradizioni europee ed extraeuropee

Dal punto di vista storico e geografico, l'evoluzione della Matematica mondiale non può essere considerata esclusivamente in termini di sviluppo teorico. Particolarmente interessanti, e senz'altro rilevanti anche dal punto di vista sociale, sono ad esempio alcuni accorgimenti pratici messi a punto per l'esecuzione delle operazioni aritmetiche.

Una breve (e forzatamente incompleta) rassegna in tal senso non può che partire dall'Aritmetica dell'antico Egitto che, come abbiamo sopra sottolineato, è la più antica tradizione matematica della quale disponiamo di testimonianze scritte. Esamineremo in particolare la moltiplicazione egiziana: essa era basata sull'interessante metodo oggi detto del "raddoppio" (Fauvel & van Maanen, 2000, p. 47), che descriveremo con un esempio elementare.

Eseguiamo con tale procedimento la moltiplicazione:

$$13 \times 18$$

Per fare ciò è necessario compilare una tabella di due colonne secondo le regole seguenti:

- il primo elemento della colonna a destra è il massimo tra i due fattori (in questo caso: 18);
- nella colonna a sinistra, il primo elemento è invece sempre 1;

- le successive righe della tabella sono costituite dai doppi di ciascun elemento precedente, finché gli elementi della colonna a sinistra (potenze di 2) risultano non maggiori del fattore non considerato nella seconda colonna (in questo caso: 13).

La tabella è dunque:

1	18
2	36
4	72
8	144

A questo punto è necessario evidenziare nella colonna a sinistra le potenze di 2 la cui somma è 13. Per fare ciò:

- consideriamo innanzitutto l'ultima potenza di 2 scritta (8);
- evidenziamo poi la precedente (4) se e solo se aggiungendo essa alle potenze già evidenziate non superiamo il fattore 13; nel nostro caso è:

$$8+4 = 12 < 13$$

dunque anche il 4 deve essere evidenziato;

- procediamo così fino ad aver evidenziato tutte e soltanto le potenze di 2 la cui somma è 13; nel nostro caso:

8, 4, 1

La somma dei numeri che risultano collocati, nella colonna a destra, in corrispondenza delle potenze di 2 precedentemente evidenziate è il risultato della moltiplicazione 13×18 .

•	1	18	•
	2	36	
•	4	72	•
•	8	144	•
	(1+4+8)	(18+72+144)	
	13	234	(risultato della moltiplicazione)

Il metodo del “raddoppio” ora descritto consentiva dunque agli scribi egiziani di eseguire moltiplicazioni anche impegnative impiegando esclusivamente l’addizione e la moltiplicazione per 2 (il “raddoppio”).

Non sarà inutile osservare che la moltiplicazione “per raddoppio” può essere eseguita anche con numeri scritti in notazione additiva (ricordiamo peraltro che la notazione numerica egizia era espressa additivamente); un esempio nella notazione romana, generalmente ben nota anche agli allievi più giovani delle nostre scuole, è il seguente:

$$XVIII \times XIII = CCXXXIII$$

(in cui viene dunque nuovamente eseguita la moltiplicazione precedente, cioè: $18 \times 13 = 234$)

•	I	XVIII	•
	II	XXXVI	
•	III	LXXII	•
•	VIII	CXXXXIII	•
(I+III+VIII)		(XVIII+LXXII+CXXXXIII)	
XIII		CCXXXIII (risultato)	

Particolarmente interessante è osservare che metodi analoghi per eseguire la moltiplicazione vengono tuttora utilizzati da alcune popolazioni dell'Europa orientale: un procedimento non dissimile da quello presentato è denominato “metodo dei contadini russi” (D'Amore & Oliva, 1993). Esso è illustrato nell'esempio seguente (ancora riferito a 13×18).

Si compila una tabella partendo, nella prima riga, dai due fattori dell'operazione; si divide ripetutamente per 2 il fattore della prima colonna, considerando soltanto la parte intera, e si raddoppia il corrispondente fattore della seconda colonna.

Otteniamo:

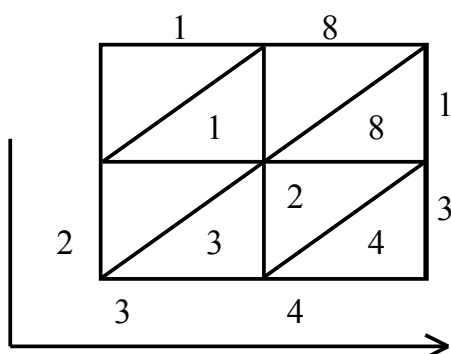
13	18
6	36
3	72
1	144

Si considerano infine tutti e soltanto i numeri della seconda colonna che corrispondono ai numeri dispari della prima. Sommando tali numeri della seconda colonna si ottiene dunque il risultato dell'operazione:

13	18	•
6	36	
3	72	•
1	144	•
(18+72+144)		
234 (risultato della moltiplicazione)		

Dal punto di vista storico, a tali procedimenti può essere affiancata la “moltiplicazione per graticola” (o “gelosia”), un procedimento espresso in notazione posizionale di probabile origine indiana, assai diffuso presso gli Arabi e quindi nell'Europa medievale: moltiplicando e moltiplicatore devono essere scritti ai lati di una tabella rettangolare, all'interno della quale vengono disposti i prodotti parziali (si veda l'esempio riportato nel seguito). Il risultato finale si ottiene sommando diagonalmente quanto scritto nelle caselle, considerando gli eventuali riporti, e può essere letto ai lati della tabella nei quali non sono scritti i fattori.

Riportiamo nuovamente la moltiplicazione ($18 \times 13 = 234$) che avevamo precedentemente eseguito con il metodo egizio del “raddoppio” e con la “moltiplicazione dei contadini russi”.



Notiamo che risulta del tutto impossibile utilizzare la “moltiplicazione per graticola” per numeri scritti in notazione numerica additiva. E proprio questa impossibilità è particolarmente significativa: essa mostra che, nel Medioevo, la diffusione della notazione numerica posizionale al posto della precedente notazione additiva ha reso possibile l’elaborazione di tecniche elementari nuove ed efficaci per l’esecuzione delle operazioni aritmetiche.

Molto interessante è il raffronto del procedimento “per graticola” con quello descritto in *La nueva cronica y buen gobierno*, opera pubblicata dopo la conquista spagnola da Felipe Guanam Poma de Ayala (ma in realtà scritta dal gesuita Blas Valera: Romano, 2000, p. 38) e riferito all’uso dei *quipu* nell’aritmetica Inca (i *quipu* erano cordicelle mediante le quali le popolazioni andine esprimevano quantità numeriche: Joseph, 2000).

Ad esempio, la precedente moltiplicazione:

$$18 \times 13 = 234$$

sarebbe stata effettuata con una disposizione di numeri di questo tipo:

			1	2
1	1	1	8	3
8	8	8		4

in cui un fattore (18) veniva riportato un numero di volte pari a: quello delle decine (1, cifra più in alto) e delle unità (8, nella posizione inferiore) costituenti l’altro fattore (13: dunque una decina e tre unità).

Osserviamo tuttavia che non tutti gli studiosi concordano nel riconoscere piena affidabilità a quanto riportato in *La nueva cronica y buen gobierno* (Romano, 2000, p. 39): in generale, la storia della Matematica dell’America precolombiana merita certamente studi ulteriori. [**Scheda n. 2. I quipu degli Inca**].

Interessanti sono infine alcune elementari ma significative tecniche pratiche per il calcolo utilizzate oggi in alcune aree geografiche extraeuropee. Infatti, nonostante l’analfabetismo diffuso anche ai giorni nostri tra le popolazioni di molte zone centro e sudamericane, molti indigeni sanno eseguire calcoli aritmetici di una qualche difficoltà ricorrendo a strategie che, nella loro semplicità, non possono essere considerate banali.

Chi te domanda fache fa. i 2 3 4. fia. 5 6 7 8 9. fa
per li cinqz modi qui sottoscritti.

5 6 7 8 9	5 6 7 8 9
2 2 7 1 5 6 / 4	1 2 3 4
1 7 0 3 6 7 / 3	2 2 7 1 5 6
1 1 3 5 7 8 / 2	1 7 0 3 6 7
5 6 7 8 9 / 1	1 1 3 5 7 8
Suma 7 0 0 7 7 6 2 6	5 6 7 8 9
Suma. 7 0 0 7 7 6 2 6	

5 6 7 8 9
2 2 7 1 5 6 4
1 7 0 3 6 7 3 6
1 1 3 5 7 8 2 2
5 6 7 8 9 1 6
Suma. 7 0 0 7 7

Suma.	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9

Una pagina del primo libro di Matematica pubblicato a stampa nel mondo, *Larte de Labbacho* (Treviso, 1478, un manuale anonimo) in cui è riportato un esempio di moltiplicazione per graticola

Presenteremo alcuni esempi certamente degni di attenzione e, come vedremo, didatticamente validi (tratti da: Chasiquiza, 1989, e da: D'Amore, 1992, p. 8).

Addizione. Vengono spesso applicate le proprietà associativa e commutativa; ad esempio:

$$\begin{aligned}
 37+48 &= (30+7) + (40+8) = \\
 &= (30+40) + (7+8) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 70 + (5+2) + (5+3) = \\
&= 70 + (5+5) + (2+3) = \\
&= 70+10+5 = 85
\end{aligned}$$

In un altro esempio di *addizione* si ricorre alla sottrazione per “completare” una decina:

$$\begin{aligned}
37+48 &= (40-3) + (50-2) = \\
&= (40+50) - (3+2) = \\
&= 90-5 = 85
\end{aligned}$$

Moltiplicazione. Spesso è applicata la proprietà distributiva:

$$\begin{aligned}
85 \times 13 &= 85 \times 10 + 85 \times 3 = \\
&= 850 + (80 \times 3) + (5 \times 3) = \\
&= 850 + 240 + 15 = 1105
\end{aligned}$$

Divisione. Eseguire $37 : 5$ significa trovare un numero che moltiplicato per 5 dia 37 o poco meno. Si procede per tentativi:

$5 \times 6 = 30$	troppo poco (manca 7 per arrivare a 37)
$5 \times 7 = 35$	troppo poco (manca 2 per arrivare a 37)
$5 \times 8 = 40$	troppo

Dunque 37 è 5×7 con resto di 2. Si scrive pertanto:

$$37:5 = 7 \quad \text{con resto di 2}$$

La presenza di strategie come quelle ora riportate è a nostro avviso interessante e significativa: non può essere trascurata, ad esempio, da chi si occupa di didattica della Matematica (e forse non solo nei paesi nei quali tali strategie si sono sviluppate).

II-1.8. Il postulato delle parallele

Una rassegna dedicata alla Storia ed alla Geografia della Matematica non può omettere un riferimento alla secolare vicenda dei tentativi di dimostrazione del *postulato delle parallele* (cioè degli sforzi dedicati a provare tale postulato utilizzando esclusivamente gli altri postulati della Geometria euclidea; Bagni, 1996, II).

Ricordiamo che il quinto postulato del primo libro degli *Elementi* di Euclide è così enunciato, in forma originale:

“[Risulti postulato] che se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti”.

Esso può essere modernamente sostituito (l’annotazione risale a John Playfair, nel 1795, come osservato in: Giusti, 1999, p. 81) con la più semplice formulazione che coincide con l’assioma IV-1 di Hilbert:

“Assegnati, nel piano, una retta ed un punto non appartenente ad essa, è unica la retta passante per il punto dato e parallela alla retta data”.

(Osserviamo che il postulato riguarda propriamente l'*unicità* della parallela condotta da un punto ad una retta data, non la sua esistenza).

Un elenco completo dei matematici impegnati, nelle varie epoche, nel tentativo di dimostrazione del quinto postulato euclideo sarebbe lunghissimo; ma particolarmente interessante è rilevare il coinvolgimento in tali tentativi di geometri sia europei che arabi, con molte reciproche influenze documentate (Bonola, 1906; un ottimo recente lavoro è: Pont, 1986; si veda inoltre: Giusti, 1999, pp. 81-86).

Ricordiamo che fra i più antichi studi sulla questione del quinto postulato vanno annoverati quelli descritti da Proclo (410-485), autore del già citato *Commento al primo libro di Euclide* (D'Amore & Matteuzzi, 1976; per la fonte originale: Proclo, 1978). Proclo cita Posidonio (I secolo a.C.), il quale impostò la propria ricerca su di una particolare concezione del parallelismo, secondo la quale due rette sono dette parallele quando appartengono allo stesso piano e sono equidistanti. Ma ammettere ciò equivale ad introdurre un nuovo postulato, che identifica il parallelismo di due rette proprio nel fatto che esse siano complanari ed equidistanti (Bonola 1906): dunque il ragionamento di Posidonio-Proclo non porta alla sperata dimostrazione del postulato, ma semplicemente alla sua sostituzione con un nuovo postulato equivalente.

L'idea di parallelismo introdotta e utilizzata da Posidonio sarà sostanzialmente ripresa da alcuni altri studiosi, tra i quali ricordiamo Giordano Vitale (1633-1711), operante ben diciassette secoli dopo Posidonio; Francesco Maria Franceschinis, al tramonto del XVIII secolo, scrisse un opuscolo, *La teoria delle parallele rigorosamente dimostrata*, in cui la dimostrazione del quinto postulato è ancora tentata con un procedimento vicino alle considerazioni ricordate da Proclo. Nessuno di tali tentativi, naturalmente, fu coronato dal successo.

Tra i matematici che si proposero di dimostrare il quinto postulato ricordiamo inoltre Gemino (I secolo a.C., citato, nella letteratura matematica araba, come Aganis: Bonola 1906), Tolomeo (II secolo), nonché gli arabi Al-Nairizi (IX-X secolo) e Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274, il quale mise in relazione il postulato delle parallele con la somma degli angoli interni di un triangolo: Giusti, 1999, p. 82). La dimostrazione di Posidonio-Proclo fu ripresa anche da Federigo Commandino (1509-1575), mentre Cristoforo Clavio (1537-1612), Francesco Patrici (1529-1597) e Pietro Antonio Cataldi (1552-1626) si dimostrarono attratti dalle idee di Nasir al-Din al-Tusi (Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992, pp. 116-117). Giovanni Alfonso Borelli (1608-1679) scrisse l'opera *Euclides restitutus* (esaminata in: Giusti, 1993), in cui il quinto postulato era ancora una volta sostituito con un nuovo assioma.

Anche John Wallis (1617-1703) si impegnò (1693) in tentativi di dimostrazione del quinto postulato (egli si occupò della traduzione di un'opera di Nasir al-Din sulla questione: Joseph, 2000, p. 332): in due conferenze tenute ad Oxford, egli ne tentò una dimostrazione basandosi sull'affermazione che di ogni figura ne esiste una simile di grandezza arbitraria. Ma anche il suo tentativo fallì (Bagni, 1996, II; Giusti, 1999, p. 82).

La fase decisiva per la soluzione del problema, che porterà nel XIX secolo alla nascita delle Geometrie non-euclidee, può essere fatta iniziare con l'opera del gesuita Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733), autore del trattato *Euclides ab omni naevo vindicatus*, che apparve nel 1733 (secondo alcuni studiosi Saccheri fu influenzato dalle idee di Nasir al-Din: Joseph, 2000, p. 353; Giusti, 1999, pp. 82-83); pochi anni dopo la pubblicazione dell'opera di Saccheri, Johann Heinrich Lambert (1728-1777) elaborò *Theorie der Parallelinien* (esaminato in: Freguglia, 1982, pp. 240-251). Anche Adrien Marie Legendre (1752-1833), in alcuni trattati di carattere didattico, riprese alcuni dei principali risultati saccheriani.

La definitiva sistemazione della questione si ebbe con le opere di Carl Friedrich Gauss (1777-1855), di Janos Bolyai (1802-1860), di Nikolaj Ivanovic Lobacevskij (1793-1857) e di Bernhard Riemann

(1826-1866): constatata, dopo secoli di infruttuosi tentativi, l'impossibilità di una dimostrazione del celebre *postulato delle parallele*, non rimase che considerare finalmente questo postulato come un'affermazione indimostrata che sta alla base di una impostazione teorica; un eventuale (e del tutto legittimo) rifiuto del quinto postulato di Euclide (ovvero la sua sostituzione con altri postulati, in contrasto con esso) diventerebbe dunque il rifiuto della stessa Geometria euclidea, in favore di altre teorie, di altre Geometrie, non per questo incoerenti.

Il contributo della tradizione araba alla questione non si limita all'opera degli studiosi sopra ricordati. Deve essere infatti menzionata l'opera di Abu'l-Fath Omar ibn Ebrahim al-Khayyami (il grande poeta e matematico Omar Khayyam, 1048-1126) che nel 1077 scrisse *Sharh ma ashkala min musadrat kitab Uqlidis* (Spiegazioni delle difficoltà nel postulato di Euclide); gran parte del libro riguarda il postulato delle rette parallele di Euclide,

“argomento che aveva già attratto l'interesse di Thabit ibn Qurra; anche al-Haytham aveva provato a dimostrare il postulato, ma il tentativo di Omar costituì un netto progresso” (Joseph, 2000, p. 305).

Dal punto di vista metodologico può essere interessante osservare che presso i geometri arabi non sempre era attribuita particolare importanza alla rigorosa deduzione logica (presente, ad esempio, negli *Elementi* di Euclide); spesso gli Arabi si mostrarono più attratti da forme di dimostrazione diverse, ad esempio basate su di una figura autoevidente (Nasr, 1977). Ciò nonostante, l'ambiente matematico arabo produsse numerosi studiosi che si occuparono della questione della dimostrabilità del quinto postulato euclideo, studiosi che furono in grado di proporre impostazioni teoriche interessanti, le quali ebbero larga risonanza in Europa (ricordiamo inoltre che anche il matematico ebraico Levi ben Gerson, operante all'inizio del XIV secolo, scrisse un commentario sul postulato delle parallele).

[Scheda n. 9. Matematica in ebraico].

Dunque anche nella lunghissima avventura che portò alla soluzione del celebre problema collegato al *postulato delle parallele* furono coinvolti esponenti di tradizioni culturali diverse, soprattutto europea ed araba: anche in questo caso, analogamente a quanto sopra notato a proposito delle ricerche sulle terne pitagoriche, un aspetto essenziale riguarda evidentemente le trasmissioni dei risultati tra gli ambienti scientifici diversi.

Citiamo ancora G.G. Joseph per una valutazione finale sul problema delle trasmissioni culturali tra il mondo arabo e l'ambiente culturale europeo:

“L'impatto degli Arabi sulla vita intellettuale dell'Europa ha una cronistoria migliore della maggior parte degli incroci tra diverse culture. La diffusione dei numeri indiani, la crescita dell'Algebra, l'introduzione della Trigonometria, la diffusione della Geometria greca e i suoi ampliamenti per opera degli Arabi sono tutti fatti ben attestati e riconosciuti dalle più recenti storie della Matematica. (...) Oltre alle trasmissioni verso Occidente, esistono due altri legami che richiedono un'ulteriore riflessione: c'è anzitutto l'intera questione delle possibili trasmissioni di idee matematiche tra il mondo arabo e la Cina. (...) [Inoltre] la Matematica e l'Astronomia indiane assorbono molto dalle fonti arabe e persiane” (Joseph, 2000, pp. 341-342).

II-1.9. Le radici storiche del Calcolo infinitesimale

Una rassegna di testimonianze e di risultati riguardanti la storia della Matematica non sarebbe completa senza uno sguardo alle nozioni di infinitamente grande e di infinitamente piccolo, che portarono, nell'Europa del XVII secolo, alla messa a punto del Calcolo infinitesimale per opera di Newton e di Leibniz.

Analogamente a quanto osservato per altri settori della Matematica (e, del resto, per quanto riguarda l'intera stessa Matematica), anche per il Calcolo infinitesimale sarebbe molto difficile fissare una data di nascita, ed in particolare stabilire se e in quale misura le esperienze di carattere infinitesimale riconducibili ad esempio al mondo ellenico possano essere considerate una sorta di preistoria della moderna Analisi matematica.

Alcuni studiosi infatti preferiscono riferire l'origine del Calcolo direttamente ed esclusivamente alle ricerche seicentesche; Nicolas Bourbaki afferma categoricamente:

“I Greci non possedettero né immaginarono niente di simile” (Bourbaki 1963, p. 171).

Invece altri Autori ritengono particolarmente significativa la presenza di metodi infinitesimali nella Matematica greca. L'opinione di Guido Castelnuovo, ad esempio, rivaluta il contributo dell'Antichità classica:

“Chi volesse risalire alle origini dei metodi infinitesimali dovrebbe arrivare a quel periodo della Filosofia greca, ove si son gettate le basi logiche della Geometria, verso il 400 a.C.” (Castelnuovo, 1938, p. 29).

Qualsiasi sia l'opinione sul valore dei contributi greci alla questione, il primo Autore spesso ricordato nella storia dei procedimenti infinitesimali è Anassagora di Clazomene (500?-428 a.C.), autore del celebre frammento:

“Rispetto al piccolo non vi è un ultimo grado di piccolezza, ma vi è sempre un più piccolo, essendo impossibile che ciò che è, cessi di essere per divisione” (citato in: Geymonat, 1970, pp. 96-97).

Esso può essere modernamente riferibile ad una successione infinitesima: Anassagora descrive infatti una quantità che può essere indefinitamente ridotta, senza mai annullarsi (un analogo frammento riguarda l'indefinitamente grande: Dupont, 1981).

Anche i paradossi di Zenone d'Elea (V secolo a.C.) sono spesso citati nella preistoria del Calcolo infinitesimale. F. Enriques e G. de Santillana affermano:

“Ma ritorniamo allo scopo principale della critica di Zenone, per rilevarne il più profondo significato matematico. (...) I paradossi che il Filosofo mette in luce sono quelli che si trovano sulla via dell'Analisi infinitesimale. La riflessione che riconosce l'idealità degli enti geometrici scopre, insieme al regno del pensiero, il mondo dell'infinito” (Enriques & de Santillana, 1936, p. 54).

Ad un metodo classico della Matematica greca è stato dato il nome di *esaustione*. La dimostrazione per esaustione, uno dei capolavori della Matematica ellenica, non può tuttavia essere considerata un vero e proprio limite in senso moderno: il risultato da dimostrare (attraverso una *reductio ad absurdum*) deve essere precedentemente intuito, intuizione che i matematici greci ottenevano mediante tecniche euristiche (Bagni, 1996, I).

Dopo l'esperienza di Eudosso di Cnido (408?-355? a.C.), di Democrito di Abdera (nato intorno al 460 a.C.) e di Euclide, una citazione deve riguardare Archimede: al grande Siracusano è infatti dovuto il perfezionamento applicativo del metodo eudossiano di esaustione, unito all'intuizione di alcuni risultati di carattere infinitesimale (Rufini, 1926; Archimede, 1974). I metodi archimedei saranno ripresi (inconsapevolmente) quasi venti secoli dopo: al metodo di esaustione si sostituì il *metodo degli indivisibili*, nato dalle ricerche di matematici tra i quali Johannes Kepler (1571-1630), Bonaventura

Cavalieri (1598-1647; l'opera di Cavalieri viene esaminata dal punto di vista didattico in: Grugnetti, 2000), Gilles Personne de Roberval (1602-1675) ed Evangelista Torricelli (1608-1647). E con Torricelli giungiamo alla vigilia della grande svolta determinata da Newton e Leibniz.

Da quanto finora ricordato, dunque, la presentazione tradizionale delle radici storiche del Calcolo infinitesimale non si discosta dal percorso che vede coinvolta la cultura scientifica occidentale che, fondata sull'eredità del mondo ellenico classico, trova la piena realizzazione nell'Europa del XVII secolo.

Tuttavia alcuni importanti contributi delle tradizioni matematiche extraeuropee non dovrebbero essere trascurati: ad esempio, per quanto riguarda l'infinito alcune intuizioni indiane sono, come vedremo, assai significative.

Abbiamo precedentemente rilevato che, come cifra, lo zero era inizialmente associato al sistema di numerazione posizionale indiano. Ma i matematici indiani non si limitarono a considerare lo zero alla stregua di un semplice segnaposto per indicare posizioni vuote nella scrittura di un numero in notazione posizionale. In Brahmagupta (VII-VIII secolo), in Mahavira (IX secolo) ed in Bhaskara (1114-1185) troviamo alcune regole di calcolo con lo zero:

$$a+0 = a$$

$$a-0 = a$$

$$a \cdot 0 = 0$$

Per quanto riguarda la divisione per 0, Bhaskara (secondo alcuni riprendendo Brahmagupta) notò che se esistesse una “frazione” come $\frac{1}{0}$, essa avrebbe una stranissima peculiarità, che descriviamo con le parole di G. Loria:

“[Una tale frazione avrebbe la] proprietà di non mutare per l'aggiunta o la diminuzione di un numero qualsivoglia (...) ond'è lecito asserire che con Brahmagupta facciano il loro ingresso nell'Aritmetica razionale i numeri 0 e ∞ ” (Loria, 1929-1933).

L'argomentazione di Bhaskara è condotta con esplicito riferimento a questioni religiose; M. Kline ricorda infatti:

“Bhaskara, parlando di una frazione il cui denominatore è uguale a 0, dice che questa frazione rimane la stessa qualunque cosa le si aggiunga o le si sottragga, proprio come nessun mutamento ha luogo nella Divinità immutabile quando vengono creati o distrutti dei mondi. Un numero diviso per zero, aggiunge, viene chiamato una quantità infinita” (Kline, 1991, I, p. 216).

Importante è anche il contributo dell'Astronomia indiana: la considerazione del moto reale istantaneo della Luna per determinare i momenti esatti in cui si verificano le eclissi portò Aryabhata, Brahmagupta e più ancora Manjula (operante intorno al 930 d.C.) a considerare alcune quantità dal punto di vista differenziale.

Circa un secolo più tardi, Bhaskara utilizzò la formula che scriveremmo modernamente:

$$d(\sin x) = \cos x \, dx$$

e nel proprio *Siddhanta Siromani* egli si mostrò consapevole che quando una variabile raggiunge il valore massimo il suo differenziale si annulla. Alcune annotazioni del matematico indiano possono

inoltre essere interpretate in chiara analogia con il risultato analitico che sarà denominato teorema di Rolle (1691) nella tradizione matematica europea (Joseph, 2000, pp. 294-295).

Una menzione meritano infine gli sviluppi in serie infinite presenti in opere matematiche cinesi tra il XVII ed il XVIII secolo, ad esempio di Mei Wending e di suo nipote Mei Juecheng (1681-1763) (Martzloff, 1997, p. 353).

Possiamo, dunque, concludere che nell'ambito della Matematica orientale si è sviluppato un Calcolo infinitesimale propriamente detto? Forse una tale affermazione, almeno sulla base delle conoscenze attualmente disponibili, sarebbe azzardata. Ma altrettanto errato e storicamente discutibile sarebbe ignorare completamente i molti contributi indiani ad uno dei settori più importanti della Matematica mondiale.

II-1.10. Un protagonista del XX secolo: Srinivasa Ramanujan

La nostra rassegna si è finora sviluppata seguendo alcuni grandi temi della ricerca matematica nella storia: abbiamo esaminato l'Aritmetica elementare, la Logica, l'Algebra, la Geometria e l'Analisi matematica. L'intrecciarsi, anche dal punto di vista geografico, delle varie esperienze esaminate ha reso impossibile organizzarne la presentazione secondo un ordine cronologico. Considerando tempi più vicini a noi, tali difficoltà sarebbero ancor più rilevanti e questo motivo, unitamente all'oggettiva difficoltà tecnica della materia da trattare, consiglierebbe di riservare alla Matematica del Novecento soltanto una sintetica presentazione. Ma per il tema generale che stiamo affrontando l'importanza di un affascinante personaggio operante nella prima metà del secolo scorso è, come vedremo, davvero primaria.

Gli eccezionali risultati matematici di Srinivasa Ayyangar Ramanujan possono essere apprezzati soltanto da poche centinaia di specialisti in tutto il mondo, forse da poche migliaia. Per questa ragione non riteniamo opportuno presentare tecnicamente le ricerche di uno dei più originali e fecondi teorici dei numeri dell'età contemporanea e, più in generale, dell'intera storia della nostra disciplina (ricordiamo comunque che una breve ricerca tratta dagli scritti di Ramanujan è stato precedentemente proposto con riferimento al problema dell'approssimazione di π con un procedimento geometrico elementare). [**Scheda n. 14. Ramanujan**].

Nonostante ciò, la breve, straordinaria vita dell'indiano Ramanujan affascina anche i non addetti ai lavori: pressoché autodidatta, egli si formò inizialmente sulla *Synopsis* di G.S. Carr, un compendio (non particolarmente avvincente, ha osservato qualche storico) di risultati elementari nella Matematica pura ed applicata; con notevoli difficoltà riuscì ad ottenere un oscuro posto di contabile e continuò a dedicarsi autonomamente ed ostinatamente allo studio della Matematica, senza peraltro seguire un percorso di ricerca accademicamente riconosciuto.

Tuttavia il giovane impiegato di Madras sentiva l'urgente bisogno di confrontarsi con gli esponenti di quella comunità scientifica internazionale la cui presenza ed importanza riusciva appena ad intravedere: scrisse ad alcuni dei più influenti matematici dell'inizio del secolo, a Cambridge; ma alcuni degli studiosi interpellati (H.F. Baker ed E.W. Hobson) non ritennero opportuno rispondergli. Godfrey Harold Hardy (1877-1947), invece, rispose a Ramanujan, colpito dagli incredibili risultati intuiti dallo sconosciuto matematico dilettante, privi di una rigorosa dimostrazione tradizionale eppure eccezionalmente stimolanti e promettenti. Iniziò così una delle più feconde collaborazioni che la storia della Matematica ricordi, collaborazione resa possibile dal viaggio di Ramanujan in Inghilterra, fermamente voluto da Hardy, e dal successivo quinquennio di permanenza del matematico indiano a Cambridge.

La storia di Srinivasa Ramanujan non è soltanto una storia di grandissimi risultati matematici: è anche un'incredibile, emozionante avventura umana, caratterizzata dal fecondo confronto di uomini come Ramanujan ed Hardy, vere personificazioni, rispettivamente, di intuizione e di rigore. Un'avventura

caratterizzata dall'interazione di due realtà scientifiche e più in generale culturali per molti versi opposte, quella indiana e quella inglese dell'inizio del XX secolo, che tuttavia riuscirono a parlarsi, a capirsi, dunque a crescere insieme: e che si integrarono perfettamente attraverso le figure-simbolo dei due eccezionali matematici, sotto le ricche volte del Trinity College, negli anni tristi della Prima Guerra Mondiale.

Il genio matematico di Ramanujan ottenne infine il pieno riconoscimento a livello internazionale: lo sconosciuto contabile, "il povero e solitario" indù che contrapponeva il suo ingegno alla tradizione della saggezza europea" (nelle parole di Hardy) giunse ad essere nominato *Fellow* della Royal Society, il massimo onore per uno scienziato dell'area culturale britannica ed uno dei titoli più ambiti del mondo. Ma la sua vicenda umana si avviava ad una prematura conclusione: la sua salute peggiorò progressivamente, forse minata dalla tubercolosi. Poco dopo il ritorno in patria, Ramanujan morì. L'indiano autodidatta che aveva rivoluzionato la moderna Teoria dei Numeri non aveva ancora compiuto trentatré anni.

II-1.11. Conclusioni: contaminazioni storiche e soggetti migranti

La storia di Srinivasa Ramanujan chiude il nostro breve saggio, almeno dal punto di vista storico: è una storia di un uomo "povero e solitario" che ha liberamente accettato il confronto aperto con un mondo scientifico e culturale immenso e potente, radicalmente diverso dal proprio; che ha scelto di discutere, sorretto solo della propria straordinaria intuizione, con gli studiosi formati nelle più rigorose scuole matematiche occidentali. Ma che mai ha rinunciato al proprio modo di ricercare e di argomentare, secondo alcuni tutt'altro che ortodosso, alle proprie radici, al ricordo delle esperienze matematiche dei propri grandi compatrioti, come gli antichi Aryabhata, Brahmagupta e Bhaskara. Dunque al proprio essere Indiano.

Ma quanti Ramanujan hanno preferito trasformarsi nella figura tradizionale del ricercatore occidentale? E, facendo ciò, quanti hanno costretto la propria intuizione entro binari che hanno finito per limitare o per sterilizzare le proprie potenzialità? [**Scheda n. 15. Un matematico inglese, un matematico indiano**].

Non intendiamo dare delle risposte categoriche a questi interrogativi: non abbiamo ovviamente elementi per farlo in termini generali. Riteniamo tuttavia l'esperienza di Ramanujan particolarmente indicativa: nessuno può dimenticare che proprio l'oscuro contabile autodidatta, seguendo la propria ispirazione e la propria cultura, ha dato un impulso assolutamente eccezionale alla Matematica mondiale, notevolmente superiore ai contributi di molti matematici nati e cresciuti in ambienti culturali chiusi, e per questo rassicuranti ma forse non particolarmente stimolanti. Ricordiamo che la storia della Matematica fornisce molti altri esempi di studiosi che, per motivi diversi, si sono trovati a vivere esperienze di confronto prolungato con tradizioni culturali diverse. [**Scheda n. 13. Abel a Berlino e a Parigi**]. [**Scheda n. 18. La guerra: André Weil in America**]. Le conseguenze derivate da tali situazioni possono essere state del tutto varie: in alcuni casi le difficoltà hanno certamente ostacolato l'opera dei soggetti migranti interessati; in altri si possono invece riscontrare straordinarie possibilità di arricchimento culturale e di stimolo. [**Scheda n. 16. Il soggiorno di André Weil in India**].

Ma i momenti dell'evoluzione storica della Matematica che sono stati precedentemente tratteggiati non si limitano all'opera dei grandi studiosi: come abbiamo visto, particolarmente viva ed importante è infatti anche la Matematica considerata "minore", quella cultura matematica popolare, di base, costituita da tecniche, procedimenti, algoritmi che, nelle più svariate tradizioni culturali, ha talvolta formato il terreno dal quale sono sorti i geni, i pensatori, gli innovatori. E questi ambienti culturali, in cui la Matematica si intreccia con le realtà sociali più difficili, si estendono naturalmente a tutto il mondo.

Tuttavia anche le tradizioni culturali extraeuropee sono talvolta studiate con riferimento primario, se non esclusivo, ad alcune aree principali; nota ad esempio G.G. Joseph:

“Negli studi sulla Matematica araba vi è una tendenza a confinare l’attenzione alle attività che si svolsero intorno al Medio Oriente e alla Spagna e a ignorare il lavoro che fu condotto, nell’ambito della tradizione islamica, nell’Africa settentrionale e occidentale, cioè in quell’ampia regione del Nord-Ovest definita col nome di Maghreb” (Joseph, 2000, p. 416).

In termini del tutto analoghi, notiamo che sarebbe opportuno e interessante lo studio delle tradizioni matematiche che si sono sviluppate in aree geografiche influenzate dalla Matematica cinese, come la Corea, il Giappone, la Mongolia, il Tibet e il Vietnam (Martzloff, 1997, pp. 105-110). Per quanto riguarda la geografia della Matematica, dunque, sono ancora moltissime le terre che attendono di essere esplorate (ma riprenderemo tale questione parlando degli orientamenti attuali della ricerca, nel paragrafo seguente).

In generale, dunque, possiamo riassumere la nostra discussione in tre punti fondamentali:

- *Prima conclusione:* un esame obiettivo della storia della disciplina, ed in particolare della collocazione geografica delle varie ricerche, prova inconfutabilmente che la Matematica non può essere considerata patrimonio di una particolare tradizione culturale. Se non è difficile riconoscere che molti dei più elevati risultati della Matematica contemporanea sono maturati nell’ambito della cultura occidentale, è parallelamente indispensabile rendersi conto che la storia della Matematica non può che essere concepita in termini di evoluzione delle diverse istituzioni culturali e dunque delle varie tradizioni. La considerazione e la piena valorizzazione di tali diversità appare elemento essenziale per comprendere correttamente la ricchezza di tradizioni matematiche che talvolta sono state troppo frettolosamente considerate secondarie.
- *Seconda conclusione:* proprio l’interazione di tradizioni matematiche diverse ha reso possibili, sia nei secoli passati che recentemente, alcuni momenti di crescita straordinariamente importanti. Sarebbe certamente difficile immaginare lo sviluppo della Matematica occidentale senza l’impulso determinato dalla rapida diffusione della notazione numerica posizionale, “importata” nell’Europa medievale dalla semisconosciuta Matematica indiana grazie alla mediazione degli studiosi mediorientali. Come sarebbe imbarazzante pensare all’irreparabile impoverimento della Matematica mondiale che sarebbe stato determinato dalla perdita di quei capolavori del mondo antico che tutti noi abbiamo potuto conoscere ed apprezzare solo grazie all’opera dei traduttori arabi.
- *Terza conclusione:* l’interazione di tradizioni culturali diverse non è storicamente avvenuta, né può realizzarsi ai giorni nostri, attraverso semplici contatti istituzionali o, comunque, senza il diretto coinvolgimento personale di singoli soggetti: pensatori, ricercatori, docenti, studenti, divulgatori. È proprio mediante il confronto diretto, infatti, che vengono a crearsi le condizioni per stimolare il dialogo più fecondo e quindi per ottenere un reciproco arricchimento. Ma tale situazione richiede che venga salvaguardata ed apprezzata l’identità di tutti i soggetti a qualsiasi titolo coinvolti: dunque è indispensabile creare le condizioni, dai punti di vista propriamente scientifico, ma anche generalmente culturale, sociale ed organizzativo, per il mantenimento di tale identità.

II-1.12. Stato dell'arte e orientamenti della ricerca

Per quanto concerne la ricerca contemporanea, notiamo innanzitutto che la storiografia occidentale è ancora prevalentemente legata ad un'impostazione eurocentrica.

Una valutazione sommaria dello "spazio" concesso da alcuni celebri trattati di storia della Matematica alle tradizioni extraeuropee può essere ricavata dalla tabella seguente, in cui abbiamo riportato le percentuali delle pagine dedicate ad alcune grandi tradizioni matematiche rispetto al totale delle pagine dell'opera (il riferimento è alle traduzioni italiane, se disponibili):

Manuale esaminato	Matematica Cinese	Matematica indiana	Matematica araba	Matematica dell'America precolombiana
Loria (1933)	3%	2%	2%	-
Struik (1948)	1%	1%	1%	-
Boyer (1968)	1%	3%	4%	cenni
Kline (1972)	-	1%	1%	-
Anglin (1994)	1%	2%	2%	-

Sebbene questi dati si riferiscano ad una valutazione sommaria e siano dunque soltanto indicativi, non possiamo non notare che la presenza delle tradizioni matematiche diverse da quella occidentale nei manuali esaminati è estremamente contenuta.

Un'importante osservazione dal punto di vista didattico riguarda inoltre i programmi scolastici ed libri di testo generalmente utilizzati (il riferimento sarà principalmente alla scuola italiana). La struttura dei programmi di Matematica della scuola pre-universitaria è collegata solidamente alla sistemazione teorica della matematica occidentale: ad esempio, dopo la presentazione degli elementi dell'Aritmetica, dell'Algebra e della Geometria euclidea piane e solida, nel triennio superiore del tradizionale "Liceo scientifico" la scansione generalmente adottata (sebbene ciò non escluda la presenza di alcune interessanti esperienze innovative) prevede lo studio della Geometria analitica (nel III anno di corso), della Trigonometria piana (IV anno di corso) e dell'Analisi matematica (nel V e conclusivo anno di corso). Da Descartes, dunque, a Weierstrass, senza alcuna significativa escursione al di fuori della "vecchia Europa": i riferimenti storici sono comunque assai contenuti e quelli geografici risultano, in generale, inesistenti. I libri di testo maggiormente utilizzati ricalcano abbastanza fedelmente tale scansione (ricordiamo ad esempio i diffusi manuali di Ferrauto e di Zwirner, pubblicati molti decenni or sono dalle case editrici D'Anna e Cedom, i più recenti Dodero-Toscani edito dalla Ghisetti e Corvi, Lamberti-Mereu-Nanni della Etas, Bagni della Zanichelli etc.). Osserviamo tuttavia che, sia dal punto di vista della ricostruzione storica che da quello didattico, la rivalutazione di un'impostazione multiculturale sta assumendo, anche per quanto riguarda specificamente la Matematica, una crescente importanza. Numerosi volumi dedicati a tale questione sono stati recentemente pubblicati (citiamo ad esempio l'ottimo: Joseph, 2000 e segnaliamo l'ampia bibliografia in esso riportata).

Molti dei più importanti convegni internazionali riservano all'approccio multiculturale spazi sempre più rilevanti: ad esempio, nell'ambito delle iniziative per il semestre italiano di presidenza dell'Unione Europea, i Ministeri italiani dell'Interno, dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (MIUR), l'Università di Roma "La Sapienza", in collaborazione con la Commissione Europea e la Rete UNICA (Réseau des Universités des Capitales de l'Europe) hanno recentemente organizzato una conferenza europea sul tema *Education, research, migration: the european policy in the context of globalisation*,

tenuta a Roma il giorno 5 dicembre 2003 presso la Facoltà di Economia dell'Università "La Sapienza". Rappresentanti del mondo politico europeo e nazionale, esperti, docenti, studenti e ricercatori hanno discusso sul tema della mobilità in Europa di studenti e di ricercatori provenienti dai Paesi Terzi; sono state inoltre presentate le direttive dell'Unione Europea in materia di residenza e di ingresso per studenti e ricercatori e le iniziative della Commissione in ambito comunitario per l'apertura dei Paesi Terzi. Durante la Conferenza è stato presentato al pubblico il portale europeo della mobilità dei ricercatori.

La sezione *Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues*, curata da Lucia Grugnetti e da Leo Rogers, è stata recentemente inclusa in *History in Mathematics Education. The ICMI Study* (Fauvel & van Maanen, 2000, pp. 39-62; nel seguito le traduzioni sono nostre). [**Scheda n. 20. Multiculturalità e didattica: esempi dall'Oceania**]. La sezione *Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice*, curata da Fulvia Furinghetti e da Luis Radford nell'importante volume *Handbook of International Research in Mathematics Education*, edito da Lyn English (Furinghetti & Radford, 2002), è un ulteriore significativo esempio dell'attenzione con cui la ricerca internazionale contemporanea segue le questioni presentate.

Lucia Grugnetti e Leo Rogers, ad esempio, osservano:

“Nel XX secolo si sono verificati cambiamenti molto significativi nel modo di considerare i contributi delle diverse culture alla nostra storia. È importante che la Matematica, come ogni altra disciplina, sia sensibile a queste nuove istanze. Mostrare come il pensiero matematico si sia sviluppato nelle differenze culture, come risposta alle necessità e alle idee presenti in società diverse, non solo rende possibile una più profonda comprensione dei concetti matematici, ma incoraggia una maggiore creatività nella loro applicazione in settori diversi. Una storia che mostri la diversità, piuttosto che l'universalità, dello sviluppo matematico aggiunge una dimensione stimolante alla disciplina stessa. In particolare, rende possibile l'ingresso in classe del mondo e della sua storia, in modo da contrastare ogni ristretta visione etnocentrica” (Fauvel & van Maanen, 2000, p. 46).

Dal punto di vista didattico, sensibilmente diversi sono i livelli di lavoro ai quali la storia sembra poter essere collocata nei processi di insegnamento-apprendimento: un livello aneddotico è spesso considerato come quello più elementare (e superficiale, sebbene sia spesso in grado di stimolare la motivazione: Radford, 1997); ad esso si affiancano livelli più elevati ed impegnativi, nei quali vengono di volta in volta valorizzate le connessioni interdisciplinari o le importanti possibilità metacognitive collegate all'uso didattico di un riferimento storico (come sottolineato in: Furinghetti & Somaglia, 1997).

L. Radford, tuttavia, sottolinea giustamente che

“la considerazione della storia della matematica come una specie di laboratorio epistemologico in cui esplorare lo sviluppo della conoscenza matematica (...) richiede l'assunzione di un punto di vista teorico che giustifichi il collegamento tra lo sviluppo concettuale nella storia e quello moderno” (Radford, 1997, p. 26; traduzione di G.T. Bagni).

Questa osservazione è cruciale. La realizzazione di un tale collegamento è infatti ostacolata da gravi difficoltà: innanzitutto il problema della selezione dei dati storici da considerare significativi, selezione che è tutt'altro che epistemologicamente neutra; inoltre le questioni collegate alla loro interpretazione, che viene sempre condotta alla luce dei nostri attuali paradigmi culturali (Confrey & Smith, 1994; Radford, Boero & Vasco, 2000).

Certamente, comunque, la storia della Matematica può fornire importanti opportunità di considerare situazioni ed elementi tratti da realtà socio-culturali diverse e di proporre efficacemente tali contributi agli allievi, nei vari livelli scolastici (citiamo ad esempio: Fauvel & van Maanen, 1997; Furinghetti, 1993; Grugnetti, 2000; Pepe 1990; Swetz, 1989 e 1995). Tuttavia è indispensabile preparare adeguatamente tale introduzione, in particolare senza mai dimenticare la precisazione dei rispettivi contesti. A tale proposito citiamo ancora L. Grugnetti e L. Rogers:

“Ad esempio, alcune etichette come *etnomatematica* o *la matematica delle donne* sono spesso utili per sottolineare l'importanza di settori particolari, ma potrebbero portare a situazioni di radicalizzazione con il pericolo di isolare certi gruppi dalla più ampia comunità matematica” (Fauvel & van Maanen, 2000, p. 50).

Dunque l'inserimento dei contributi collegati alle varie tradizioni culturali ed etniche nella (multiculturale) comunità matematica deve scongiurare accuratamente due rischi per molti versi opposti: da un lato, l'inglobamento di una comunità culturale in un'altra, o nella cosiddetta *comunità internazionale*, con le conseguenti gravissime perdite di originalità che possono portare addirittura a fenomeni di sterilizzazione; ma d'altro canto deve essere evitato che l'opportuna proclamazione delle diversità possa essere causa dell'isolamento culturale di un singolo gruppo. [Scheda n. 19. **Comunicare la Matematica: riviste, manuali, congressi**].

Il confronto dialettico tra gruppi di ricercatori e di studenti appartenenti a tradizioni diverse può invece, come precedentemente ricordato, portare al reciproco sostanziale arricchimento, allo stimolo di una visione generale ben più ampia ed articolata che risulta certamente più feconda (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2001; D'Amore, 2003). [Scheda n. 17. **Scuole di Matematica**].

Segnaliamo infine l'importanza dello studio delle caratteristiche dei differenti contesti politici in cui l'educazione matematica si sviluppa oggi nei vari paesi del mondo (di particolare interesse, ad esempio, può essere il confronto tra i programmi scolastici). A tale riguardo si potrà fare riferimento a *The political context*, sezione curata da Florence Fasanelli nel citato volume *History in Mathematics Education. The ICMI Study* (Fauvel & van Maanen, 2000, pp. 1-38; le traduzioni sono nostre). Florence Fasanelli osserva:

“La gente ha studiato, imparato, utilizzato la Matematica per più di quattromila anni, sebbene sia solo relativamente da poco tempo che la Matematica viene insegnata, in molti paesi, ad una rilevante parte della popolazione. Con la diffusione dell'istruzione, maggiore attenzione viene specificamente dedicata a che cosa viene insegnato ed ai motivi di tali scelte. Queste decisioni sono in ultima analisi di carattere politico, influenzate da molti fattori tra i quali l'esperienza degli insegnanti, le attese dei genitori e dei datori di lavoro, il contesto sociale” (Fauvel & van Maanen, 2000, p. 1).

La crescente attenzione da parte della comunità scientifica internazionale, testimoniata dalle precedenti citazioni, non esaurisce naturalmente il problema che sta alla base di molte delle considerazioni esposte nel presente lavoro: la creazione di una società in cui i contributi delle varie culture siano visti come autentici arricchimenti costituisce infatti un procedimento lungo e difficoltoso, anche dal punto di vista sociale ed economico. Ma riteniamo che un corretto approccio culturale alle molte questioni coinvolte, un approccio ad esempio che tragga origine dal mondo della scuola e che nel mondo della scuola possa radicarsi, costituisca una premessa forte ed importante per la nascita di una generale mentalità tesa a valorizzare “la diversità, piuttosto che l'universalità” (Fauvel & van Maanen, 2000, p. 46).

Segnaliamo infine, tra le iniziative più recenti, la presenza al Convegno ICME-10 (Copenhagen, luglio 2004) del Discussion Group 15 diretto da Franco Favilli (Università di Pisa) e da Ismael Abdulcarimo (Università di Maputo, Mozambique). Il programma di tale importante iniziativa era incentrato sulle questioni seguenti, che riportiamo come invito conclusivo alla riflessione (indichiamo inoltre: Favilli, 2000, Favilli & Tintori, 2002, Favilli, Oliveras & Cèsar, 2003):

- Quali sono le relazioni tra l'Etnomatematica, la Matematica, l'Antropologia e le politiche riguardanti l'Educazione matematica?
- Quali elementi evidenziano che i programmi scolastici comprendenti alcuni contenuti etnomatematici abbiano effettivamente successo nel raggiungere i propri scopi (in particolare dal punto di vista etnomatematico)?
- Quali sono le implicazioni degli studi riguardanti l'Etnomatematica sulla Matematica e sull'Educazione matematica?
- Qual è l'influenza delle diverse lingue e degli altri fattori culturali specifici sulla produzione di diversi contenuti matematici?

II-2. Dati relativi agli Autori ed ai Testi

II-2.1. Dati relativi agli Autori individuati

Nelle Schede sono proposti e commentati brani degli Autori seguenti:

[Scheda 1, Scheda 9 e Scheda 14] George Gheverghese Joseph (School of Economic Studies, Università di Manchester), nato nel Kerala (India Meridionale), ha vissuto in Kenya e si è laureato in Inghilterra, dove è attualmente docente universitario di Statistica. Ha pubblicato i libri *Women at Work* (1983), *The Crest of Peacock. Non-European Roots of Mathematics* (1991, la cui traduzione italiana è stata pubblicata nel 2000) e *Multicultural Mathematics* (1993).

[Scheda 2 e Scheda 5] Giuliano Romano (Università di Padova) ha insegnato Cosmologia e Storia dell'Astronomia ed è uno dei più importanti studiosi, non solo in ambiente nazionale, di Archeoastronomia e della tradizione culturale, in particolare scientifica, dell'America precolombiana. Fa parte del Comitato Scientifico dei Convegni internazionali dell'Accademia dei Lincei riguardanti l'Archeoastronomia.

[Scheda 3 e Scheda 4] Joseph Needham (1900-1995) è uno dei massimi storici e sinologi del XX secolo. È autore del grande trattato *Scienza e Civiltà in Cina*, pubblicato nel 1954-1959 e considerato una pietra miliare per la conoscenza della cultura cinese nel mondo occidentale.

[Scheda 5] Georges Ifrah, nato a Marrakech nel 1947, docente di Matematica, ha pubblicato a Parigi nel 1985 *Les chiffres ou l'histoire d'une grande invention*, edito nel 1989 nella traduzione italiana, un ricco e documentato studio sul numero, sulle modalità e sugli strumenti di calcolo dal punto di vista storico, etnologico e archeologico.

[Scheda 6] Jean-Claude Martzloff (CNRS e Institut des Hautes Études Chinoises, Paris) è uno dei più noti ricercatori sulla Matematica cinese.

[Scheda 7] Morris Kline (1917-2001) è considerato uno dei massimi storici della Matematica del XX secolo. Dal 1938 al 1975 ha insegnato all'Università di New York. Il suo libro del 1973 *Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math* portò ad una radicale revisione critica di molti criteri di insegnamento della Matematica diffusi a partire dagli anni Sessanta.

[Scheda 8] Jean-Luc Chabert (University of Picardy) ha curato il volume *A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip*, pubblicato in inglese nel 1998 (l'edizione originale in francese, intitolata *Histoire d'algorithmes. Du caillou à la puce*, è stata pubblicata a Parigi nel 1994).

[Scheda 10] Bartolomeo Veratti ha raccolto a Modena nel 1860 nello studio *De' matematici italiani anteriori all'invenzione della stampa*, dedicato allo storico della Matematica Baldassarre Boncompagni, alcuni lavori precedentemente pubblicati negli *Opuscoli Religiosi, Letterari e Morali*.

[Scheda 11] Joseph M. Bochenski è l'autore del fondamentale trattato storico *La logica formale*, pubblicato nella traduzione italiana in due tomi: *I. Dai Presocratici a Leibniz* e *II. Logica matematica* nel 1972 (l'edizione originale in tedesco, intitolata *Formale Logik*, risale al 1956).

[Scheda 12] Fiorella Sricchia Santoro (Università di Napoli Federico II), storica dell'Arte, ha curato il saggio *Arte italiana e arte straniera*, inserito nel terzo volume della monumentale *Storia dell'Arte Italiana* edita a Torino della Einaudi nel 1979.

[Scheda 13] Eric Temple Bell (1883-1960), scozzese, a diciannove anni si trasferì negli Stati Uniti dove conseguì la laurea e il Ph.D. Insegnò all'università di Washington e all'Istituto di Tecnologia della California. Come matematico si occupò di teoria analitica dei numeri e di analisi diofantea. Il suo libro più conosciuto, *Men of Mathematics*, pubblicato nel 1937 e riedito nel 1950 gli valse la Medaglia d'oro del Commonwealth Club della California. I brani selezionati dall'opera di Bell riguardano la biografia di **Niels Henrik Abel** (1802-1829), grande matematico norvegese che scrisse i primi lavori nel 1825; la sua memoria più importante fu però pubblicata soltanto postuma. La proposizione che sarà definita da Jacobi "teorema di Abel" è un risultato di assoluta importanza e generalità, che influenzò a lungo lo sviluppo di molti settori della ricerca matematica. Dopo una breve vita tormentata dalla salute malferma e dalle ristrettezze economiche, Abel morì a Froland il 6 aprile 1829.

[Scheda 14] Robert Kanigel è autore di una vivace biografia di **Srinivasa Ayyangar Ramanujan** (1887-1920), il matematico indiano autodidatta dotato di una prodigiosa intuizione nel campo della teoria analitica dei numeri, che collaborò con Hardy a Cambridge dal 1914 al 1919. Ramanujan venne nominato *Fellow* della Royal Society; poco dopo il ritorno in India, morì a soli 33 anni.

[Scheda 15] Godfrey Harold Hardy (1877-1947) è uno dei matematici più profondi del XX secolo; in collaborazione con John Edensor Littlewood (1885-1977) pubblicò molte opere fondamentali di Analisi matematica. Dal 1914 al 1919 collaborò con Srinivasa Ramanujan.

[Scheda 16 e Scheda 18] André Weil (1906-1998) è considerato una delle più significative personalità della Matematica del XX secolo. Dopo aver conseguito il dottorato a Parigi insegnò nelle università di Aligarh (India), Strasburgo, San Paolo, Chicago e, dal 1958, all'Institute for Advanced Studies di Princeton. Si è occupato di gruppi localmente compatti, di Geometria algebrica, di varietà

abeliane e soprattutto di Teoria dei numeri. Nel 1933 fu tra i fondatori del gruppo Bourbaki, che con l'opera monumentale *Éléments de Mathématiques* ha esercitato un'influenza fondamentale sul pensiero matematico contemporaneo.

[Scheda 17 e Scheda 19] Jean Alexandre Eugène Dieudonné (1906-1992), come André Weil, è stato uno dei fondatori e dei componenti più significativi del gruppo Bourbaki. Le sue ricerche spaziano in molti settori della Matematica contemporanea: Topologia generale, spazi vettoriali topologici, gruppi classici, Geometria formale. Si è interessato inoltre di storia della Matematica ed ha pubblicato numerosi libri, alcuni dei quali utilizzati per l'insegnamento della Matematica superiore.

[Scheda 20] Lucia Grugnetti (Università di Parma), studiosa di epistemologia e di didattica della Matematica, con Leo Rogers ha curato la sezione *Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues* nel volume *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, edito nel 2000 a cura di J. Fauvel e di J. van Maanen.

[Scheda 20] Leo Rogers (University of Surrey, Roehampton), studioso di didattica della Matematica, con Lucia Grugnetti ha curato la sezione *Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues* nel volume *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, edito nel 2000 a cura di J. Fauvel e di J. van Maanen.

II-2.2. Dati relativi ai Testi selezionati

Nelle Schede sono proposti e commentati brani tratti dalle opere seguenti:

[Scheda 1, Scheda 9 e Scheda 14] Joseph, G.G. (2000), *C'era una volta un numero. La vera storia della Matematica*, Il Saggiatore, Milano (edizione originale: *The Crest of the Peacock. Non-European Roots of Mathematics*, 1991).

Si tratta di un'ampia panoramica sulla storia delle Matematiche extraeuropee: gli antichi Egizi, i Babilonesi, l'Africa, la Cina, l'Africa e l'America precolombiana. L'Autore sottolinea che alcuni grandi risultati della Matematica occidentale sono stati preceduti da formulazioni extraeuropee; inoltre inquadra lo sviluppo del pensiero matematico nell'ambito di una stratificazione storica e concettuale complessa.

[Scheda 2 e Scheda 5] Romano, G. (2000), Cenni sulla Matematica precolombiana, *Contributi scientifici in occasione della mostra "Manuali di Matematica dal XIV al XIX secolo"*, Ateneo di Treviso, 25-42.

Il saggio da cui è tratto il brano presentato è uno dei molti lavori scientifici di uno dei massimi specialisti della Matematica e dell'Astronomia sviluppatasi nell'America precolombiana. Fa parte di una miscellanea di scritti pubblicata in occasione di una mostra e di un congresso (Treviso, 18-28 marzo 2000) dedicati ai libri di soggetto matematico editi dall'introduzione della stampa a caratteri mobili all'inizio del XX secolo (sullo stesso argomento e dello stesso Autore consigliamo inoltre la lettura del volume *Introduzione alla Matematica precolombiana*, Cleup, Padova 2000, in cui sono esaminati i modi di operare degli antichi Americani nei confronti delle operazioni aritmetiche elementari).

[Scheda 3 e Scheda 4] Needham, J. (1985), *Scienza e civiltà in Cina*, III, La Matematica e le scienze del cielo e della terra, I, Matematica e astronomia, Einaudi, Torino (edizione originale: *Science and civilisation in China*, Cambridge University Press 1959).

Il grande trattato di Needham è considerato un punto di riferimento per gli studiosi di tutto il mondo ed ha contribuito in termini essenziali alla diffusione della cultura scientifica cinese nel mondo occidentale.

[Scheda 5] Ifrah, G. (1989), *Storia universale dei numeri*, Mondadori, Milano (edizione originale: *Les chiffres ou l'histoire d'une grande invention*, 1985).

Il volume, ricco e sempre accuratamente documentato, propone una panoramica storica dedicata all'Aritmetica elementare, partendo dalla *preistoria dei numeri* e riservando particolare attenzione alle diverse tradizioni culturali coinvolte (Egitto, Mesopotamia, Grecia, Roma, Cina, India, America precolombiana). Un'interessante sezione è dedicata alle macchine calcolatrici elementari, dalla mano al pallottoliere.

[Scheda 6] Martzloff, J.-C.. (1997), *A History of Chinese Mathematics*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg (edizione originale francese: *Histoire des Mathématiques chinoises*, Masson, Paris 1987).

La trattazione della storia della Matematica in Cina è preceduta da una rigorosa analisi del contesto storico, sociale e geografico in cui la cultura matematica cinese si è sviluppata. Particolarmente ricca la bibliografia di opere sia di autori cinesi che di autori occidentali.

[Scheda 7] Kline, M. (1991), *Storia del pensiero matematico*, I-II, Einaudi, Torino (edizione originale: *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York 1972).

La monumentale opera di Kline è considerata uno dei più importanti ed autorevoli trattati del Novecento sulla storia della Matematica dalle origini ai primi decenni del XX secolo. Nonostante l'impostazione sia principalmente collegata allo studio della tradizione matematica occidentale, l'opera si impone per il rigore storico e per la profondità dei contenuti matematici trattati. L'edizione italiana citata è corredata da un'appendice di Alberto Conte intitolata *Dagli Anni '30 ad oggi*.

[Scheda 8] Chabert, J.-L. (a cura di) (1998), *A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg (edizione originale: *Histoire d'algorithmes. Du caillou à la puce*, Éditions Belin, Paris 1994).

Il volume raccoglie contributi di Évelyne Barbin (IUFM, Créteil e IREM, University Paris VII), Jacques Borowczyk (IUFM, Orléans-Tours), Jean-Luc Chabert (University of Picardy), Michel Guillemot (University Paul Sabatier e IREM, Toulouse) e Anne Michel-Pajus (Lycée Claude Bernard, Paris e IREM, University Paris VII). La parte riguardante la Matematica araba è stata curata da Ahmed Djebbar (University Paris XI, Orsay centre); la parte riguardante la Matematica cinese è stata curata da Jean-Claude Martzloff (CNRS e Institut des Hautes Études Chinoises, Paris). I soggetti trattati vanno dagli algoritmi elementari per le operazioni aritmetiche ai quadrati magici, dal metodo della falsa posizione per la risoluzione di equazioni algebriche ai procedimenti per il calcolo approssimato di π , dalle quadrature approssimate alla valutazione della velocità di convergenza di un algoritmo.

[Scheda 10] Veratti, B. (1860), *De' matematici italiani anteriori all'invenzione della stampa*, Soliani, Modena (ristampa anastatica: Forni, Bologna 1980).

Il lavoro, dettagliato e interessante, è dedicato al grande storico della Matematica Baldassarre Boncompagni e raccoglie alcuni studi biografici, anche riferiti a matematici considerati minori, studi precedentemente pubblicati come articoli negli *Opuscoli Religiosi, Letterarij e Morali*, rivista modenese dallo stesso Editore Soliani che ha curato la pubblicazione del volume.

[Scheda 11] Bochenski, J.M. (1972), *La logica formale. I. Dai Presocratici a Leibniz. II. Logica matematica*, Einaudi, Torino (edizione originale: *Formale Logik*, Verlag Karl Alber GmbH, Freiburg-München 1956).

I due tomi dell'opera storica di Bochenski costituiscono una pietra miliare nella storiografia della Logica. L'approfondimento dei vari momenti della storia della disciplina è condotto con assoluto rigore sui testi originali. Una sezione del trattato (nel II volume) è dedicata alla presentazione della Logica indiana.

[Scheda 12] Sricchia Santoro, F. (1979), *Arte italiana e arte straniera, Storia dell'Arte Italiana*, III, Einaudi, Torino, 71-174.

Il saggio propone una rigorosa analisi delle interazioni culturali tra l'ambiente artistico italiano e quelli delle tradizioni straniere, con particolare riferimento a quelle europee.

[Scheda 13] Bell, E.T. (1990), *I grandi matematici*, Sansoni, Firenze (edizione originale: *Men of Mathematics*, Simon & Schuster, New York 1950).

Il volume di Bell raccoglie le biografie di alcuni grandi Matematici, dall'Antichità al XIX secolo. Nonostante l'impostazione generale del lavoro possa apparire datata, la ricchezza dei particolari rende l'intera opera tuttora utile e di vivace, piacevole lettura.

[Scheda 14] Kanigel, R. (2003), *L'uomo che vide l'infinito. La vita breve di Srinivasa Ramanujan, genio della matematica*, Rizzoli, Milano (edizione originale: 1991).

Si tratta di un'ampia e documentata biografia di Ramanujan, corredata di molte immagini: la vita del geniale matematico indiano è ricostruita con vivacità giornalistica sulla base di testimonianze originali e di documenti, in alcuni casi presentati per la prima volta. Analoga attenzione è riservata dall'Autore alla presentazione della vita di Hardy, il grande matematico di Cambridge che a lungo collaborò con Ramanujan.

[Scheda 15] Hardy, G.H.; Seshu Aiyar, P.V. & Wilson, B.M. (1927), *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*, University Press, Cambridge.

La preziosa miscellanea di lavori di Ramanujan, comprendente quasi tutti gli articoli pubblicati durante la vita del grande matematico indiano, è stata stampata sette anni dopo la sua morte (quando molte altre ricerche di Ramanujan, pubblicate successivamente, erano ancora inedite). I lavori matematici sono preceduti da un'accurata biografia di Ramanujan curata da P.V. Seshi Aiyar e da R. Ramachandra Rao e da un breve saggio di G.H. Hardy.

[Scheda 16 e Scheda 18] Weil, A. (1994), *Ricordi d'apprendistato. Vita di un matematico*, Einaudi, Torino (edizione originale: *Souvenirs d'apprentissage*, Birkhauser, Basel 1991).

L'autobiografia di André Weil è il racconto di una straordinaria avventura umana ed intellettuale, in cui la ricerca matematica si intreccia con le esperienze dell'Autore in Europa e in India, negli Stati Uniti e nel Brasile: certamente un libro appassionante e profondo anche per chi non è uno specialista della disciplina di Bourbaki.

[Scheda 17 e Scheda 19] Dieudonné, J. (1989), *L'arte dei numeri*, Mondadori, Milano (edizione originale: *Pour l'honneur de l'esprit humain*, Hachette, Paris 1987).

Uno dei più significativi matematici del XX secolo ha riassunto in un libro ricco e stimolante una presentazione della Matematica in generale: in particolare, Dieudonné si occupa della storia della Matematica, delle sue implicazioni filosofiche e sociali, della comunità dei matematici, delle prospettive future della disciplina.

[Scheda 20] Grugnetti, L. & Rogers, L. (2000) (a cura di), *Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues*, Fauvel, J. & van Maanen, J. (a cura di), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, Kluwer, Dodrecht.

Il saggio di L. Grugnetti e L. Rogers è inserito come capitolo II nel volume curato da J. Fauvel e da J. van Maanen. Gli altri capitoli sono dedicati all'analisi dei diversi contesti politici, alle prospettive di ricerca, al ruolo della storia della Matematica nella formazione degli insegnanti e nelle varie situazioni pratiche di apprendimento, all'uso didattico delle fonti originali e delle metodologie di insegnamento non tradizionali.

II-3. Bibliografia ragionata

In questa sezione conclusiva presenteremo, rinunciando a (inconcepibili) pretese di completezza, alcuni riferimenti bibliografici utili sia all'inquadramento teorico che alla presentazione didattica degli argomenti trattati. Di alcuni volumi (quelli la cui data di prima pubblicazione risulta particolarmente significativa) sono state esplicitamente indicate le edizioni originali; per altre opere è stata citata solo la traduzione italiana.

Avvertiamo che alcuni volumi sono ordinariamente disponibili (2003) in commercio; altre edizioni citate, risalenti ad alcuni anni fa, possono essere reperite presso biblioteche pubbliche o di dipartimenti matematici universitari.

II-3.1. Opere generali sulla storia della Matematica e della Logica

Un'ottima fonte per l'approfondimento delle radici storiche di molti concetti della Matematica, con particolare riferimento ai contributi delle tradizioni culturali extraeuropee, è:

Joseph, G.G. (2000), *C'era una volta un numero. La vera storia della Matematica*, Il Saggiatore, Milano (edizione originale: *The Crest of the Peacock. Non-European Roots of Mathematics*, 1991).

Si tratta di una delle pochissime opere orientate alla dettagliata presentazione della Matematica non europea. Per una presentazione generale della storia della Matematica (quasi sempre incentrata sulla tradizione occidentale) indichiamo, tra i molti manuali disponibili:

- Anglin, W.S. (1994), *Mathematics. A Concise History and Philosophy*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg.
- Bagni, G.T. (1996), *Storia della Matematica. I. Dall'Antichità al Rinascimento. II. Dal Rinascimento ad oggi*, Pitagora, Bologna.
- Boyer, C.B. (1982), *Storia della Matematica*, Mondadori, Milano (edizione originale: *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968).
- Eves, H. (1983), *An Introduction to the History of Mathematics*, Saunders, Philadelphia.
- Frajese, A. (1969), *Attraverso la storia della Matematica*, Le Monnier, Firenze.
- Kline, M. (1982), *La Matematica nella cultura occidentale*, Feltrinelli, Milano (*Mathematics in western culture*, Oxford University Press, New York 1953).
- Kline, M. (1985), *Matematica: la perdita della certezza*, Mondadori, Milano (*Mathematics: the loss of certainty*, Oxford University Press, New York 1980).
- Kline, M. (1991), *Storia del pensiero matematico*, I-II, Einaudi, Torino (edizione originale: *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York 1972).
- Struik, D.J. (1981), *Matematica: un profilo storico*, Il Mulino, Bologna (edizione originale: *A Concise History of Mathematics*, Dover, New York 1948).

Il seguente volume è dedicato alla Matematica moderna e contemporanea, ma la sua impostazione ha un respiro talmente ampio da consigliarne l'inserimento tra le opere generali:

- Bottazzini, U. (1990), *Il flauto di Hilbert. Storia della Matematica moderna e contemporanea*, UTET, Torino.

Una ricca collezione di brevi saggi di un "autore" prestigiosissimo è:

- Bourbaki, N. (1963), *Elementi di storia della Matematica*, Feltrinelli, Milano (*Eléments d'histoire des Mathématiques*, Hermann, Paris 1960; *Elements of the History of Mathematics*, Springer, Berlin 1997; seconda edizione: 1998).

Molto interessante e dall'impostazione non del tutto usuale:

- Bellissima, F. & Pagli, P. (1993). *La verità trasmessa. La Logica attraverso le dimostrazioni matematiche*, Sansoni, Firenze.

Datato ma sempre prezioso è il trattato di G. Loria:

- Loria, G. (1929-1933), *Storia delle Matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino (riedizione: Hoepli, Milano 1950; ristampa anastatica: Cisalpino-Goliardica, Milano 1982).

I principali momenti della storia della Logica (particolarmente occidentale) possono essere approfonditi ricorrendo alle opere seguenti:

Bagno, G.T. (1997), *Elementi di storia della Logica formale*, Pitagora, Bologna.
 Barker, S.F. (1970), *Filosofia della Matematica*, Il Mulino, Bologna.
 Blanché, R. (1973), *La Logica e la sua storia*, Ubaldini, Roma.
 Casari, E. (1964), *Questioni di filosofia della Matematica*, Feltrinelli, Milano.
 Casari, E. (1973), *La filosofia della Matematica del '900*, Sansoni, Firenze.
 Casari, E. (a cura di) (1979), *Dalla Logica alla metalogica*, Sansoni, Firenze.
 Cellucci, C. (a cura di) (1967), *La filosofia della Matematica*, Laterza, Bari.
 Enriques, F. (1922), *Per la storia della logica*, Zanichelli, Bologna (ristampa anastatica: 1987, Zanichelli, Bologna).
 Freguglia, P. (1978), *L'algebra della Logica. Un profilo storico*, Editori Riuniti, Roma.
 Kneale, W.C. & Kneale, M. (1972), *Storia della Logica*, Einaudi, Torino.
 Rogers, R. (1978), *Logica matematica e teorie formalizzate*, Feltrinelli, Milano.
 Scholz, H. (1962), *Storia della Logica*, Silva, Milano.
 Stjzkin, N.I. (1980), *Storia della Logica*, Editori Riuniti, Roma.

ed in particolare segnaliamo il testo fondamentale:

Bochenski, J.M. (1972), *La Logica formale. I. Dai Presocratici a Leibniz. II. Logica matematica*, Einaudi, Torino (edizione originale: *Formale Logik*, Verlag Karl Alber GmbH, Freiburg-München 1956).

che, pur essendo impostato secondo un orientamento che privilegia la presentazione della tradizione logica occidentale, riporta anche un'eccellente presentazione della Logica indiana. Alle antinomie è specificamente dedicato:

Aimonetto, I. (1975), *Le antinomie logiche e semantiche*, Filosofia, Torino.

Segnaliamo inoltre due classiche opere di un grande protagonista della Logica contemporanea:

Russell, B. (1946), *I principi della Matematica*, Longanesi, Milano (edizione originale: *The principles of Mathematics*, Cambridge 1903).
 Russell, B. (1948), *Introduzione alla filosofia matematica*, Longanesi, Milano (edizione originale: *Introduction to mathematical philosophy*, London 1919).

Per una presentazione generale e non eccessivamente tecnica della Matematica e della Logica del XX secolo indichiamo i due interessanti volumi:

Lolli, G. (2002), *Filosofia della Matematica. L'eredità del Novecento*, Il Mulino, Bologna.
 Odifreddi, P. (2000), *La Matematica del Novecento*, Einaudi, Torino.

II-3.2. Opere su argomenti particolari

Alcune opere sono orientate specificamente alla presentazione di esperienze matematiche e, in generale, scientifiche riconducibili a tradizioni culturali extraeuropee. Per quanto riguarda la storia dei sistemi di numerazione e della notazione numerica nelle varie culture segnaliamo in particolare:

Ifrah, G. (1989), *Storia universale dei numeri*, Mondadori, Milano (edizione originale: *Les chiffres ou l'histoire d'une grande invention*, 1985).

Picutti, E. (1977), *Sul numero e la sua storia*, Feltrinelli, Milano.

Alla Matematica cinese ed in generale dell'estremo oriente sono dedicati i volumi:

Gericke, H. (1984), *Mathematik in Antike und Orient*, Springer, Berlin.

Iannaccone, I. & Tamburello, A. (a cura di) (1990), *Dall'Europa alla Cina: contributi per una storia dell'Astronomia*, Università degli Studi "Federico II", Istituto Universitario Orientale, Napoli.

Li Yan & Du Shiran (1987), *Chinese Mathematics: A Concise History*, Clarendon Press, Oxford.

Martzloff, J.-C.. (1997), *A History of Chinese Mathematics*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg (edizione originale francese: *Histoire des Mathématiques chinoises*, Masson, Paris 1987).

Needham, J. (1985), *Scienza e civiltà in Cina*, III, La Matematica e le scienze del cielo e della terra, I, Matematica e astronomia, Einaudi, Torino (edizione originale: *Science and civilisation in China*, Cambridge University Press 1959).

Swetz, F.J. & Kao, T.I. (1977), *Was Pythagoras Chinese? An Examination of Right Triangle Theory in Ancient China*, University Park and London, The Pennsylvania State University Press.

Alle tradizioni matematiche dell'America precolombiana sono dedicati i volumi:

Romano, G. (1998), *Mio padre è il cielo*, Cleup, Padova.

Romano, G. (2000), *Introduzione alla matematica precolombiana*, Cleup, Padova.

Alla storia degli algoritmi (secondo un orientamento che non esclude le tradizioni extraeuropee) è dedicato:

Chabert, J.-L. (a cura di) (1998), *A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg (edizione originale: *Histoire d'algorithmes. Du caillou à la puce*, Éditions Belin, Paris 1994).

Spunti e riferimenti di sicuro interesse, per quanto riguarda in particolare la storia della Geometria non soltanto occidentale, si trovano in:

Freguglia, P. (1982), *Fondamenti storici della geometria*, Feltrinelli, Milano.

Neugebauer, O. (1974), *Le scienze esatte nell'Antichità*, Feltrinelli, Milano (edizione originale: *The exact sciences in Antiquity*, Brown University Press, Providence 1957).

Van der Waerden, B.L. (1983), *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg.

Alla storia della Prospettiva, settore che rappresenta un punto di contatto di grande interesse tra la Matematica e l'Arte, e della Geometria proiettiva è dedicato il volume:

Bagni, G.T. & D'Amore, B. (1994), *Alle radici storiche della prospettiva*, Angeli, Milano.

nel quale sono considerate anche alcune esperienze fiorite in ambiti non europei.

Alla storia dell'Analisi matematica (quasi completamente occidentale) sono specificamente dedicati:

- Bottazzini, U. (1981), *Il calcolo sublime*, Boringhieri, Torino.
- Castelnuovo, G. (1938), *Le origini del Calcolo infinitesimale*, Zanichelli, Bologna (ristampa: Feltrinelli, Milano 1962).
- Dupont, P. (1981), *Appunti di storia dell'Analisi infinitesimale*, I-II, Cortina, Torino.
- Edwards, C.H. Jr. (1994), *The Historical Development of the Calculus*, Springer Verlag, Berlin (terza edizione; prima edizione: 1979).
- Geymonat, L. (1948), *Storia e filosofia dell'Analisi infinitesimale*, Fratelli Bocca, Torino.
- Goldstine, H.H. (1995), *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, Springer, Berlin (seconda edizione; prima edizione: 1980).
- Hairer, E. & Wanner, G. (1996), *Analysis by Its History*, Springer-Verlag, New York.
- Rufini, E. (1926), *Il «Metodo» di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell'antichità*, Zanichelli, Bologna (ristampa anastatica: Feltrinelli, Milano 1961).

Una splendida collezione di dimostrazioni si trova in:

- Aigner, M. & Ziegler, G.M. (1998), *Proofs from The Book*, Springer Verlag, Berlin.

Una profonda e impegnativa panoramica storica sulla Teoria dei Numeri è in:

- Weil, A. (1994), *La teoria dei numeri*, Einaudi, Torino.

A settori o ad argomenti particolari (ma il riferimento resta primariamente alla cultura occidentale) sono dedicati:

- Arrigo, G. & D'Amore, B. (1992), *Infiniti*, Angeli, Milano.
- Baldi B. (1998), *Le vite de' matematici. Edizione annotata e commentata della parte medievale e rinascimentale*, Nenci, E. (a cura di), Franco Angeli, Milano.
- Bell, E.T. (1990), *I grandi matematici*, Sansoni, Firenze (edizione originale: *Men of Mathematics*, Simon & Schuster, New York 1950).
- Carruccio, E. (1971), *Mondi della logica*, Zanichelli, Bologna.
- Carruccio, E. (1972), *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*, Pitagora, Bologna.
- Cellucci, C. (1978), *Teoria della dimostrazione*, Boringhieri, Torino.
- Chaitin, G.J. (1998), *The Limits of Mathematics*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg.
- Chandrasekhar, S. (1990), *Verità e bellezza*, Garzanti, Milano.
- Courant, R. & Robbins, H. (2000), *Che cos'è la matematica? Introduzione elementare ai suoi concetti e metodi*, Bollati Boringhieri, Torino (seconda edizione riveduta da Ian Stewart; edizione originale: *What is Mathematics? An elementary approach to Ideas and Methods*, Oxford University Press, New York 1941).
- D'Amore, B. & Matteuzzi, M. (1975), *Dal numero alla struttura*, Zanichelli, Bologna.
- D'Amore, B. & Matteuzzi, M. (1976), *Gli interessi matematici*, Marsilio, Venezia.
- D'Amore, B. & Oliva, P. (1993), *Numeri*, Angeli, Milano.
- Devlin, K. (1994), *Dove va la Matematica*, Bollati Boringhieri, Torino.
- Dieudonné, J. (1989), *L'arte dei numeri*, Mondadori, Milano (edizione originale: *Pour l'honneur de l'esprit humain*, Hachette, Paris 1987).
- Enriques F. & de Santillana, G. (1936), *Compendio di storia del pensiero scientifico*, Zanichelli, Bologna (ristampa anastatica: Zanichelli, Bologna 1973).
- Enriques, F. (1938) *Le Matematiche nella storia e nella cultura*, Zanichelli, Bologna (ristampa anastatica: Zanichelli, Bologna 1982).

- Giusti, E. (1993), *Euclides reformatus. La teoria delle proporzioni nella scuola galileiana*, Bollati Boringhieri, Torino.
- Giusti, E. (1999), *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*, Bollati Boringhieri, Torino.
- Hardy, G.H. (1989), *Apologia di un matematico*, Garzanti, Milano.
- Hersh, R. (2001), *Cosa è davvero la Matematica*, Baldini & Castoldi, Milano (edizione originale: *What is Mathematics, Really*, Oxford University Press, Oxford 1997).
- Hersh, R. & Davis, J.P. (1986), *L'esperienza matematica*, Comunità, Milano (edizione originale: *The Mathematical Experience*, Birkhäuser, Basel 1981).
- Hilbert, D. & Cohn-Vossen, D. (1986), *Geometria intuitiva*, Boringhieri, Torino.
- Hofstadter, D.R. (1990), *Gödel, Escher, Bach; un'eterna ghirlanda brillante*, Adelphi, Milano 1990.
- Lang, S. (1991), *La bellezza della Matematica*, Boringhieri, Torino.
- Lolli, G. (1985), *Le ragioni fisiche e le dimostrazioni matematiche*, Il Mulino, Bologna.
- Lolli, G. (1998), *Il riso di Talete*, Garzanti, Milano.
- Maracchia, S. (1979), *Da Cardano a Galois*, Feltrinelli, Milano.
- Makinson, D.C. (1979), *Temi fondamentali della logica moderna*, Boringhieri, Torino.
- Meschowski, H. (1973), *Mutamenti nel pensiero matematico*, Boringhieri, Torino.
- Sigler, L. (2002), *Fibonacci's Liber Abaci*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg.
- Stubhaug, A. (2004), *Niels Henrik Abel et son époque*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg.
- Tagliagambe, S. (1991), *L'epistemologia contemporanea*, Editori Riuniti, Roma.
- Veratti, B. (1860), *De' matematici italiani anteriori all'invenzione della stampa*, Soliani, Modena (ristampa anastatica: Forni, Bologna 1980).
- Waismann, F. (1971), *Introduzione al pensiero matematico*, Boringhieri, Torino.
- Weil, H. (1962), *La simmetria*, Feltrinelli, Milano.
- Wells, D. (1991), *Numeri memorabili*, Zanichelli, Bologna.

Interessanti richiami alle tradizioni europee si possono inoltre trovare nelle opere:

- Berggren, L. (1986), *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg.
- Bonola, R. (1906), *La Geometria non euclidea*, Zanichelli, Torino.
- Chasiquiza, L.M. (1989) Los conocimientos matematicos en las culturas indigenas, *Pueblos indigenas y educacion*, Abya-Yala, Quito, 9, gennaio 1989, 39-66.
- D'Amore, B. (1992), Numerali, numeri ed aritmetica nelle culture indigene centro e sudamericane, *Didattica delle scienze*, 158, febbraio 1992, 5-8, La Scuola, Brescia.
- Davis, P.J. (1965), *Il mondo dei grandi numeri*, Zanichelli, Bologna.
- Emmer, M. (1991), *La perfezione visibile. Matematica e arte*, Theoria, Roma-Napoli.
- Franci, R. & Toti Rigatelli, L. (1979), *Storia della teoria delle equazioni algebriche*, Mursia, Milano.
- Geymonat, L. (1970), *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti, Milano.
- Gheri, I. (1986), *Matematica dilettevole e curiosa*, Hoepli, Milano.
- Nasr, S.H. (1977), *Scienza e civiltà nell'Islam*, Feltrinelli, Milano.
- Pont, J.C. (1986), *L'avventure des parallèles. Histoire de la géométrie non-euclidienne*, Peter Lang, Berna.
- Raymond, P. (1979), *La storia e le scienze*, Editori Riuniti, Roma.

Ricordiamo che ad un grande protagonista della Matematica del XX secolo (ed uno dei più importanti matematici di tutti i tempi) sono specificamente dedicati:

- Hardy, G.H.; Seshu Aiyar, P.V. & Wilson, B.M. (1927), *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*, University Press, Cambridge.
- Kanigel, R. (2003), *L'uomo che vide l'infinito. La vita breve di Srinivasa Ramanujan, genio della Matematica*, Rizzoli, Milano (edizione originale: 1991).

II-3.3. Libri ed articoli riguardanti fonti originali ed aspetti didattici

Di notevole importanza per le molte questioni collegate all'inserimento della storia della Matematica nella didattica è:

- Pizzamiglio, P. (2002), *Matematica e Storia. Per una didattica interdisciplinare*, Editrice La Scuola, Brescia,

opera ricca anche di suggerimenti e di indicazioni pratiche per gli insegnanti. Per quanto riguarda le fonti originali, sono disponibili numerose edizioni critiche. Segnaliamo ad esempio che è possibile consultare:

- Archimede (1974), *Opere*, Frajese, A. (a cura di), UTET, Torino.
- Bottazzini, U.; Freguglia, P. & Toti Rigatelli, L. (1992), *Fonti per la storia della Matematica*, Sansoni, Firenze.
- Euclide (1970), *Elementi*, Frajese, A. & Maccioni L. (a cura di), UTET, Torino.
- Proclo (1978), *Commento al primo libro degli Elementi di Euclide*, Timpanaro Cardini, M. (a cura di), Pisa, Giardini.
- Smith, D.E. (1959), *A source book in Mathematics*, Dover, New York.

lavori chiaramente orientati alla presentazione dei grandi protagonisti della tradizione matematica occidentale.

Una ricchissima selezione di saggi dedicati all'uso didattico della storia della Matematica ed ai quadri teorici ad esso collegati è:

- Fauvel, J. & van Maanen, J. (a cura di) (2000), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, Kluwer, Dodrecht

e un'analoga citazione meritano i volumi e gli articoli seguenti:

- Confrey, J. & Smith, E. (1996), Comments on James Kaput's chapter, A.H. Schoenfeld (a cura di), *Mathematical Thinking and Problem Solving*, Erlbaum, Hillsdale, 172-192.
- Fauvel, J. & van Maanen, J. (1997), Storia e didattica della matematica, *Lettera Pristem*, 23, 8-13.
- Furinghetti, F. & Radford, L. (2002), Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice, English, L. (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 631-654, Lawrence Erlbaum, New Jersey.
- Furinghetti, F. & Somaglia, A. (1997), Storia della matematica in classe, *L'educazione matematica*, XVIII, V, 2, 1.
- Furinghetti, F. (1993), Insegnare matematica in una prospettiva storica, *L'educazione matematica*, III, IV, 123-134.

- Grugnetti, L. (2000) The history of Mathematics and its Influence on Pedagogical Problems, Kats, J. (Ed.), *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective*, The Mathematical Association of America, 29-35.
- Lladò, C. & Boero, P. (1997), Les interactions sociales dans la classe et le rôle médiateur de l'enseignant, *Actes de la CIEAEM-49*, Setubal 171-179.
- Pepe, L. (1990), Storia e didattica della matematica, *L'educazione matematica*, III, I-2, 23-33.
- Radford, L. (1997), On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26-33.
- Radford, L., Boero, P. & Vasco, C. (2000), Epistemological assumptions framing interpretations of students' understanding of mathematics, Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, Kluwer, Dordrecht, 162-167.
- Swetz, F.J. (1989), Using problems from the history of mathematics in classroom instruction, *Mathematics Teacher*, 82, 370-377.
- Swetz, F.J. (1995), To know and to teach: mathematical pedagogy from a historical context, *Educational Studies in Mathematics*, 29, 73-88.
- Tizzani, P. & Boero, P. (1997), La chute des corps de Aristote à Galilée: voix de l'histoire et échos dans la classe, *Actes de la CIEAEM-49*, Setubal 369-376.

Segnaliamo che i lavori citati, pur affrontando questioni teoriche di carattere generale, non escludono orientamenti multiculturali.

Un'interessante presentazione utilizzabile anche in chiave didattica di tecniche elementari tratti dalla storia della Matematica è nel volume:

- Bunt, L.N.H; Jones, P.S. & Bedient, J.D. (1983), *Le radici storiche della Matematiche elementari*, Zanichelli, Bologna.

Inoltre, una presentazione didattica di alcuni momenti significativi della storia della Matematica (non soltanto occidentale) si trova in:

- Bagni, G.T. (2000), *Matematici*, Antilia, Treviso.

Citiamo alcuni volumi e articoli di ricerca dedicati specificamente all'Etnomatematica:

- Abraham, J., & Bibby, N. (1988), Mathematics and Society: Ethnomathematics and a Public Educator Curriculum, *For the Learning of Mathematics*, 8(2), 2-11.
- Antonouris, G. (1988), *Multicultural Perspectives T E S 30 9 88*, 64.
- Arora, R. & Duncan, C. (1986) (Eds), *Multicultural Education: Towards Good Practice*, London: Routledge.
- Bernal, M. (1987), *Black Athena-The Egyptian Origin of Greek Civilisation* By Free Association Books, London.
- Bishop, A. (1988), *Mathematical Enculturation*, Dordrecht, Reidel.
- Bishop, A. (1988), Mathematics Education in Its Cultural Context, *Educational Studies in Mathematics*, 19, 179-191.
- Borba, M. (1990), Ethnomathematics and Education, *For the Learning of Mathematics*, 10(1), 39-43.
- Borba, M. (1992), Teaching Mathematics: Ethnomathematics, The Voice of Sociocultural Groups, *The Clearing House*, 65(3), 134-135.
- Bovett, A. (1983), Mathematics - A Universal Language, *Multicultural Teaching* 1, 3, 15-16.

- Brown, A & Al. (1990), *Proceedings of Conference Political Dimensions of Mathematics Education: Action and Critique*, University of London Institute of Education.
- Cotton, A. (1990), Anti Racist Mathematics Teaching And The National Curriculum, *Mathematics Teaching* 132.
- Craft, A. & Bardell, G. (1984) (Eds.), *Curriculum Opportunities In A Multicultural Society*, Harper & Row, London.
- Craft, A. & Klein, G. (1986), *An Agenda For Multicultural Teaching*, SCDC/Longman, London 64-66.
- D'Ambrosio, U. (1985), Ethnomathematics and its Place in the History and Pedagogy of Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 5(1), 44-48.
- D'Ambrosio, U. (1990), The History of Mathematics and Ethnomathematics, How a Native Culture Intervenes in the Process of Learning Science, *Impact of Science on Society*, 40(4), 369-78.
- D'Ambrosio, U. (1990), The Role of Mathematics in Building a Democratic and Just Society, *For the Learning of Mathematics*, 10(3), 20-23.
- D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M.I. (2001), Matemática de la cotidianidad, *Paradigma* (Maracay, Venezuela) XX, 1, 59-72.
- D'Amore, B. (2003), Matemática em algumas culturas de America do Sul: uma contribuição à Etnomatemática, *Bolema. Boletim de Educação Matemática* (Rio Claro, SP, Brasil), 73-89.
- Didsbury School Of Education (1989), *Multi Cultural Education Curriculum Approaches Subject Teaching Supplement Maths*, Didsbury School Of Education.
- Ernest, P. (1988) (Ed.), *The Social Context of Mathematics Teaching*, Perspectives 37, University of Exeter, School of Education.
- Ernest, P. (1991), *The Philosophy of Mathematics Education* Falmer, London.
- Ernest, P. (1994) (Ed.), *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematics Education*, Falmer, London.
- Favilli, F. (2000), Cultural intermediation for a better integration in the classroom: the role of the ethnomathematics programme, Ahmed, A., Kraemer, J.M. & Williams, H. (Eds.), *Cultural Diversity in Mathematics Education*, CIEAEM 51, Chichester, Horwood Publishing, 1165-1168.
- Favilli, F. & Tintori, S. (2002), Teaching Mathematics to foreign pupils in Italian compulsory school: findings from an European project, Valero, P. & Skovmose, O. (Eds.), *Proceedings of the 3rd International Conference of Mathematics Education and Society*, II, Copenhagen, Centre for Research in Learning Mathematics, 260-272.
- Favilli, F., Oliveras, M.L. & Cèsar, M. (2003), Bridging mathematical knowledge from different cultures: proposals for an intercultural and an interdisciplinary curriculum, Pateman, N.A., Dougherty, D.J. & Zilliox, J. (Eds.), *Proceedings of PME 27*, 2, 3656-372, Honolulu, USA.
- Gerdes, P. (1986), How To Recognise Hidden Geometrical Thinking, *For The Learning of Mathematics* 6(2) 10-17.
- Gill, D. & Levidow, L. (1987) (Eds.), *Anti-Racist Science Teaching*, Free Association Books, London.
- ILEA - Learning Resources Branch (1987), *Everyone Counts*, ILEA, London.
- Joseph, G.G. (1985), An Historical Perspective *T E S* 11 10 85, 47.
- Joseph, G.G. (1986), A Non-Eurocentric Approach To School Maths, *Multicultural Teaching*, 4(2), 13-14.
- Joseph, G.G. (1987), Foundations of Eurocentrism in Mathematics, *Race & Class*, 28, 3, 13-28.
- Julie, C, Angelis, D & Davis, Z. (1993) (Eds.), *Political Dimensions of Mathematics Education: Curriculum Reconstruction For Society In Transition*, Maskew, Miller and Longman, Johannesburg, South Africa.

- Kadodwala, D. & Demaine, J. (1988), Multicultural and Antiracist Education, *The Unnecessary Divide Curriculum*, 9, 2, 99-102.
- Keitel, C. (1989), (Ed.), *Mathematics Education and Society*, UNESCO, Paris.
- Lance, D. F. (1983), *Cross-Cultural Studies In Cognition and Mathematics*, Academic Press, New York.
- Mathematical Association (1988), *Mathematics in a Multicultural Society*, Mathematical Association, Leicester.
- Nelson, D., Joseph, G., & Williams, J. (1993), *Multicultural Mathematics*, Oxford University Press, Oxford.
- Powell, A. & Frankenstein, M. (1997), *Ethnomathematics: Challenging Eurocentrism in Mathematics Education*, State University of New York Press, Albany, NY.
- Schaaf, W.L. (1963), *Our Mathematical Heritage*, Collier, New York.
- Walkerdine, V. (1990), Difference, cognition and mathematics education, *For the learning of mathematics*, 10(3), 51-6.
- Wilson, B.J. (1981), *Cultural Contexts of Science and Mathematics Education*, CSSE, University of Leeds.
- Wilson, B.J. (1983), *Cultural Contexts of Maths Education*, Educational Analysis 5(3) 5-14.
- Wiltshire Education Authority (1987), *Mathematics For All*, Wiltshire Education Authority, Salisbury.
- Woodrow, D. (1984), Mathematics: Multi-Cultural Issues, *T E S* 11 5 84, 41-42.
- Woodrow, D. (1989), Multicultural and Anti-Racist Mathematics Teaching, Ernest, P (Ed.), *Mathematics Teaching: The State of the Art*, Falmer, London.
- Zaslavsky, C. (1973), *Africa Counts*, PWS Publishers, Boston.
- Zaslavsky, C. (1980), *Count On Your Fingers African Style*, Thomas Crowell, New York.
- Zaslavsky, C. (1985), Bringing the World Into the Math Class. *Curriculum Review*, 24(3), 62-65.
- Zaslavsky, C. (1988), Integrating Math With the Study of Cultural Traditions. *International Study Group on Ethnomathematics Newsletter*, 4(2), 5-7.
- Zaslavsky, C. (1991), Multicultural Mathematics Education for the Middle Grades. *Arithmetic Teacher*, 38(6), 8-13.
- Zaslavsky, C. (1991), World Cultures in the Mathematics Class, *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 32-36.

Dal punto di vista specificamente didattico, un aspetto interessante potrebbe riguardare la lettura di testi originali o di commenti in lingua non italiana. Ovviamente la scelta della lingua per una tale iniziativa dovrebbe tenere conto della composizione delle classi interessate e delle particolari caratteristiche curriculari.

Anticipiamo che i titoli da considerare per un'attività di questo tipo potrebbero essere moltissimi, sia per quanto riguarda le letture di carattere generale che i saggi su argomenti specifici (alcuni di essi sono già stati citati nella presente bibliografia). In questa sede ci limitiamo a segnalare quattro volumi di sicuro interesse:

- Dhombres, J. & Robert, J.B. (2000), *Joseph Fourier, Créateur de la physique mathématique*. Coll. un savant, une époque, Belin, Paris (seconda edizione; edizione originale: 1998).
- Garcés Contreras, G. (1995), *Pensamiento Matemático y Astronómico en el México Precolombino*, Instituto Politécnico Nacional, Mexico D.F. (terza edizione; edizione originale: 1982).
- Kronfellner, M. (1998) *Historische Aspekte im Mathematikunterricht. Eine didaktische Analyse mit unterrichtsspezifischen Beispielen*, Verlag Holder-Pichler-Tempsky, Wien.
- Stillwell, J. (1997), *Mathematics and its History*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg (quarta edizione; prima edizione: 1989).

II-3.4. Alcuni siti interessanti presenti in rete

Segnaliamo infine, come sempre senza alcuna pretesa di completezza, la presenza in rete di alcuni siti particolarmente interessanti.

Alla storia della Matematica sono dedicati:

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/>
<http://aleph0.clarku.edu/%7Edjoyce/mathhist/mathhist.html>
<http://www.maa.org/amazon/history/history1.html>

Un'enciclopedia della Matematica è in:

<http://www.treasure-troves.com/math/>

Il sito di “History and Pedagogy of Mathematics”, organismo internazionale per la ricerca sulle applicazioni didattiche della storia della Matematica, è:

<http://130.158.186.230/hpm/index.htm>

Il sito dell'Unione Matematica Italiana è:

<http://www.dm.unibo.it/umi/index.html>

Il sito del Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica è:

<http://www.dm.unito.it/semdidattica/>

Il sito della Società Italiana di Storia delle Matematiche è:

<http://www.dm.unito.it/sism/index/html>

Il sito del Centro di Ricerche didattiche “U. Morin” (Paderno del Grappa) è:

<http://www.filippin.it/morin/>

Dedicato alla storia ed all'epistemologia per la didattica della Matematica, corredato di materiali scaricabili è:

<http://www.syllogismos.it>

(sito curato dall'autore del presente *Commento*).